Úlohy k 6. cvičení, sage link `https://kam.mff.cuni.cz/~fiala/la2-3`

1. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.

2. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Odvoďte vztah mezi $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ a $\det(\boldsymbol{A})$.

4. Rozhodněte, jestli jsou následující matice unitární.

   a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

5. Ukažte, že každou hermitovskou matici $\boldsymbol{A}$ řádu n lze zapsat výrazem $\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{H}} + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{H}} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{H}}$, kde $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ jsou vhodně zvolené vlastní vektory příslušné (ne nutně různým) vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.