Úlohy k 6. cvičení

1. **(sage)** V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r\}$ řádkového prostoru následujících matic.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. **(sage)** Rozšiřte ortonormální báze z předchozí úlohy na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

3. **(sage)** Pro matice z předchozí úlohy určete ortogonální projekci $\boldsymbol{p}$ vektoru $\boldsymbol{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru příslušné matice a souřadnice této projekce $[\boldsymbol{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

4. **(možné v sage)** Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

   Všimněte si, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou vzájemně kolmé.

5. Zjistěte které analogie následujících vztahů pro množinový doplněk,
   (konkrétně pro množiny A, B : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$,)
   platí i pro ortogonální doplněk množinových operací na prostorech U a V, resp. množinách X a Y:
   a) $(U \cup V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$,
   b) $(X \cup Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$,
   c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp \cup V^\perp$,
   d) $(U \cap V)^\perp = \operatorname{span}(U^\perp \cup V^\perp)$,
   e) $(U \setminus V)^\perp = U^\perp \cup V$.
   f) $(U \setminus V)^\perp = \operatorname{span}(U^\perp \cup V)$.

6. Pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, \ldots, a_5$ platí: $4a_1 + 3a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5 \leq 9\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_5^2}$

7. **(sage)** Pro následující matici $\boldsymbol{A}$ najděte ortonormální bázi $\ker(\boldsymbol{A})$ a poté ji rozšiřte na bázi $\mathbb{R}^5$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 8 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & -14 & 3 \\ -1 & 1 & -12 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & -3 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

   Také najděte ortonormální bázi $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ a poté ji rozšiřte na bázi $\mathbb{R}^5$.
   Jak spolu nalezené báze souvisejí?