

Jméno a příjmení: .....

Kolik času jste potřebovali na vyřešení úloh? (včetně zápisu řešení):

1. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

Jeden z vlastních vektorů spočítejte ručně. Na výpočet ostatních můžete využít počítač pro provedení operací s maticemi (součin, inverze, Gaussova eliminace), zbytek výpočtu ale dopočítejte ručně.

2. V tělese  $\mathbb{Z}_{11}$  spočítejte  $\mathbf{A}^{1000}$  (neboli tisící mocninu matice  $\mathbf{A}$ ) pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a to buď s využitím Jordanova normálního tvaru, nebo pomocí Cayleyovy–Hamiltonovy věty.

Pokud počítáte mocninu přímočaře jako 999 součinů nebo pomocí binárního umocňování, získáte jen část bodů. Pokud dojdete ke správnému výsledku oběma požadovanými způsoby, dostanete 3 body navíc.

Můžete využít počítač na výpočet vlastních vektorů a pro provedení operací s maticemi (součin, inverze, Gaussova eliminace) — v tom případě je možné odevzdat okomentovaný výpočet v sage notebooku jako export do .pdf.

*Instrukce k řešení domácích úloh: Důležitý je nejen výsledek (ten lze s různou přesností zjistit různými způsoby: graficky, analyticky, apod.), ale především způsob, jak jste k němu dospěli. Srozumitelně popište podstatné kroky svých úvah. Přehledně запиšte výpočty použité k odvození výsledku. U numerických výsledků spočítejte i konkrétní čísla. Algebraické výrazy co nejvíce zjednodušte. Nezapomeňte na odpověď (a pro svůj klid ani na zkoušku, jde-li ji provést).*

*Pokud v zadání není uvedeno, že smíte použít počítač, je třeba celý výpočet zapsat. Počítač však vždy můžete použít k tomu, abyste si ověřili, že svůj výsledek, případně i jeho výpočet máte správně.*

*Úlohy si nejprve vyřešte stranou. Odevzdávejte až čistopis svého řešení bez chyb a škrtnutí. Nečitelné práce se nehodnotí. K odevzdání použijte nejlépe owl na **kam.mff.cuni.cz/owl**, nebo je vypracujte na papír. K tomu si můžete vytisknout i toto zadání a řešení zapsat na volné místo na stránce.*

*Dojde-li vám na papíře místo, vezměte další listy kancelářského papíru formátu A4, každý podepište, očísľujte a uveďte jejich počet. Odevzdané papíry budou skenovány, proto je nesešívajte ani neslepujte.*