Úlohy k 4. cvičení

1. **(možné v sage)** Pro standardní skalární součin $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$:

   - skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - euklidovské normy vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - vzdálenost vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - zdali jsou vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ navzájem kolmé.

   a) $\boldsymbol{x}^T = (4, 2, 3)$, $\boldsymbol{y}^T = (1, 5, -2)$.
   b) $\boldsymbol{x}^T = (3, 1, -2)$, $\boldsymbol{y}^T = (1, -3, 2)$.
   c) $\boldsymbol{x}^T = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{y}^T = (5, 2, -2)$.
   d) $\boldsymbol{x}^T = (2, 1, 4, -1)$, $\boldsymbol{y}^T = (4, -1, 0, 2)$.
   e) $\boldsymbol{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\boldsymbol{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.
   f) $\boldsymbol{x}^T = (1, 2, 1, -2i)$, $\boldsymbol{y}^T = (i, 2i, i - 1, 2)$.
   g) $\boldsymbol{x}^T = (1, 1 + i)$, $\boldsymbol{y}^T = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)

2. **(možné v sage)** Určete u následujících vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$:

   - skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - normy vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - zdali jsou vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ navzájem kolmé.

   vzhledem ke skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^3$ dánému předpisem:

   $$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

   a) $\boldsymbol{x}^T = (4, 2, 3)$, $\boldsymbol{y}^T = (1, 5, -2)$.
   b) $\boldsymbol{x}^T = (3, 1, -2)$, $\boldsymbol{y}^T = (1, -3, 2)$.
   c) $\boldsymbol{x}^T = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{y}^T = (5, 2, -2)$.
   d) $\boldsymbol{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\boldsymbol{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

3. Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

4. Určete kosinus úhlu, který svírá hlavní úhlopříčka krychle s podstavou. Podobně spočítejte kosinus úhlu mezi podstavou čyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajícího vrcholu. Spočítejte také kosinus úhlu mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou.

   Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisejí?

   Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?

5. Mějme dva kolmé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Dále nechť $\|\boldsymbol{u}\| = 12$, $\|\boldsymbol{v}\| = 5$. Určete $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$.