Úlohy k 3. cvičení

1. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

2. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici a to jak nad tělesem reálných čísel tak i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Mějme matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, jejichž součin komutuje a přitom $\boldsymbol{A}$ je regulární.

   Rozhodněte, zdali také komutuje součin matic adj $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

4. V závislosti na hodnosti čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ rozhodněte, jakou hodnost má adj $\boldsymbol{A}$.

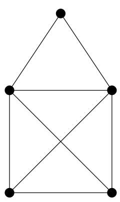
5. Určete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a} = (3,1,1)^T$, $\boldsymbol{b} = (2,1,1)^T$ a $\boldsymbol{c} = (2,3,2)^T$.

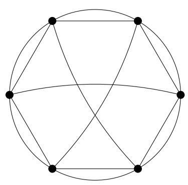
   (Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$.)

6. Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory $\boldsymbol{a} = (1,3,1)^T, \boldsymbol{b} = (1,0,3)^T, \boldsymbol{c} = (1,1,1)^T$ na vektory $f(\boldsymbol{a}) = (3,1,0)^T, f(\boldsymbol{b}) = (1,0,2)^T, f(\boldsymbol{c}) = (4,1,5)^T$.

   Určete objem V elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

7. Určete počet koster následujících (multi)grafů:

   
   a)

   
   b)

8. **(sage)** Pomocí determinantu Laplaceovy podmatice určete počet koster Petersenova grafu a grafů krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu.