Úlohy k 2. cvičení

1. V oboru reálných čísel určete hodnotu následujícího determinantu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix}.$$

2. **(sage)** Ověřte vztah o determinantu součinu $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$ a determinantu inverzní matice $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$ pro náhodné regulární čtvercové matice řádu 4.

3. **(sage)** Sestrojte celočíselnou matici řádu 5 se všemi prvky kladnými a determinantem 7.

4. Rozviňte determinanty následujících reálných matic s parametry:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \\ -1 & 2 & -1 & d \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 1 & -1 & c & 0 \\ -1 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}$$

5. Určete determinanty následujících matic:
$$S_n = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}, \qquad T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

6. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

7. Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:
$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:
$$\text{a) v } \mathbb{R}\text{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{b) v } \mathbb{Z}_5\text{:} \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

9. **(sage)** Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pro:
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 92 \\ 7 \\ 18 \\ 78 \\ 36 \\ 41 \end{pmatrix},$$