

1. V oboru reálných čísel určete hodnotu následujícího determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix}.$$

2. (**sage**) Ověřte vztah o determinantu součinu $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ a determinantu inverzní matice $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$ pro náhodné regulární čtvercové matice řádu 4.

3. (**sage**) Sestrojte celočíselnou matici řádu 5 se všemi prvky kladnými a determinantem 7.

4. Rozviňte determinanty následujících reálných matic s parametry:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \\ -1 & 2 & -1 & d \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 1 & -1 & c & 0 \\ -1 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}$$

5. Určete determinanty následujících matic:

$$S_n = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}, \quad T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

6. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ je dělitelný 17.}$$

7. Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:

$$\text{a) v } \mathbb{R}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \text{b) v } \mathbb{Z}_5: \begin{matrix} 2x + y + 4z = 1 \\ 3x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 3 \end{matrix}$$

9. (**sage**) Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 92 \\ 7 \\ 18 \\ 78 \\ 36 \\ 41 \end{pmatrix},$$