1/3

R	1z	1d	2	3	4	$\sum$
10	2	1	1	3	0	17

4

Jméno: Jiří Student .... vzorový test

1. Vyslovte a dokažte větu o vztahu mezi řešeními $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.
2. Přehledově sepište, co víte o vektorových prostorech a jejich podprostorech.
   (Uveďte prosím definice, věty, příklady a souvislosti. Důkazy nejsou vyžadovány.)
3. Rozhodněte, zdali pro všechny permutační matice $\boldsymbol{P}$ a regulární matice $\boldsymbol{A}$ stejného řádu platí, že matice $\boldsymbol{PA}$ má za inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.
4. V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s uspořádanou bází $B = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$ určete souřadnice $[f]_B$ vektoru $f(x) = x^4 - 1$.

Pokud pojem definujete slovně, ukažte také, jak jej lze zavést pomocí matematického formalismu. Při formulaci vět a lemmat nezapomínejte na žádný z předpokladů. Zdůvodněte výsledky všech úloh.

Uveďte celkový počet listů. Každý list očíslujte a podepište. Při odevzdávání přeložte všechny listy najednou na formát A5 tak, aby tato strana byla vnější a vaše jméno bylo nahoře.

J. Student 213

1. Pokud je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^n$ tak
potom existuje bijekce mezi množinami řešení
soustav $Ax = 0$ a $Ax = b$.

chybí předpoklad že $Ax=b$ má řešení.

Důkaz: Bijekce je zobrazení $x \to x - x_0$

co je x_0?

toto zobrazení je prosté a proto je to bijekce.

proč je prosté? třeba ověřit, že je i na., třeba ověřit, že obrazem je opět řešení

2. Vektorový prostor $(V, +, \circ)$ je množina
vektorů, která splňuje následující axiomy:

- $(V, +)$ je Abelovská grupa
- $a \circ u + b \circ u = (a+b) u$ ← chybí kvantifikátory
- $u \circ a + u \circ b = u \cdot (a+b)$ ← neplatné násobení

chybějící axiomy

Podprostorem je podmnožina vektorového prostoru.

-- chybí vlastnosti

Průnik i sjednocení je také podprostor.

NE!

Příklad vektorového prostoru: $\mathbb{R}^3$

Nedostatečně specifikováno.

příklad podprostoru $\mathbb{R}^2$.

není podprostorem

J. Student 3/3

3. B je inverzní k A pokud $A \cdot B = I$ ✓

Zde $(P \cdot A) \cdot (A^{-1} P^T) = P (A \cdot A^{-1}) \cdot P^T = P \cdot P^T = I_n$ ✓

Rozhodnutí ?

proč?

4. nestihla

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

1. Pokud je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ tak pokud soustava $Ax=b$ má alespoň jedno řešení, tak potom existuje bijekce mezi množinami řešení soustav $Ax=b$ a $Ax=0$.

Důkaz: Dle předpokladů existuje x_0 takové, že $Ax_0=b$.

Zobrazení $f: x \to x-x_0$ splňuje:

pokud $Ax=b$, potom $A(f(x)) = A(x-x_0) = Ax - Ax_0 = b-b = 0$

tedy $f(x)$ je řešením soustavy $Ax=0$.

$\Rightarrow$ f zobrazuje řešení soustavy $Ax=b$ na řešení soustavy $Ax=0$.

Podobně zobrazení $g: x' \to x'+x_0$ splňuje, že když

$Ax'=0$, potom $A \cdot g(x') = A(x'+x_0) = Ax' + Ax_0 = 0+b = b$

$\Rightarrow$ g zobrazuje řešení soustavy $Ax=0$ na řešení s. $Ax=b$

Složení $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x - x_0 + x_0 = x$ je identita $\Rightarrow f$ je prosté

podobně $(f \circ g)(x) = f(g(x')) = x' + x_0 - x_0 = x'$ je identita $\Rightarrow f$ je na

a proto f je bijekce mezi množinami

$\{x : Ax=b\}$ a $\{x' : Ax'=0\}$

2. Vektorový prostor $(V,+,\cdot)$ nad tělesem T je

Abelovská grupa $(V,+)$ a zobrazení $\cdot : T \times V \to V$

(zvané skalární násobek) splňující navíc:

- $\forall a,b \in T\ \forall v \in V$: $av + bv = (a+b)v$
- $\forall a \in T\ \forall u,v \in V$: $a \cdot u + a \cdot v = a \cdot (u+v)$
- $\forall v \in V$: $1 \cdot v = v$, kde 1 je jednotkový prvek tělesa T.
- $\forall a,b \in T\ \forall v \in V$: $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) v$.

Příklady: aritmetické VP: $\mathbb{R}^n$, T^n, $\mathbb{Q}^n$

prostor matic $\mathbb{R}^{m \times n}$

prostor funkcí, triviální vektorový prostor $V = \{0\}$.

Podprostorem vektorového prostoru V nad tělesem T je

každá podmnožina U, která je uzavřená na součty

a skalární násobky: $\forall u,v \in U$: $u+v \in U$

$\forall u \in U\ \forall a \in T$: $a \cdot u \in U$.

Příklad: roviny a přímky obsahující počátek

jako podprostor $\mathbb{R}^3$.

Věta o průniku a spojení podprostorů U a V prostoru W:

$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(\mathrm{span}(U \cup V))$

Každý podprostor obsahuje o ... nulový vektor.

Věta: Libovolný průnik podprostorů téhož vektorového prostoru je opět podprostorem. Formálně, jsou-li U_i, $i \in I$ podprostory V, potom $\bigcap_{i \in I} U_i$ je také podprostorem V.

Příklad: Řešení soustavy $Ax = o$ je průnikem podprostorů odpovídajících jednotlivým rovnicím.

Tato věta vede na definici:

Podprostor generovaný množinou $M \subseteq V$ je průnik všech podprostorů, které M obsahují.

Formálně $\mathrm{span}(M) := \bigcap \{U : M \subseteq U, U \text{ podprostor } V\}$

Věta: Je-li M podmnožina vektorového prostoru V nad T, potom $\mathrm{span}(M)$ tvoří všechny lineární kombinace vektorů z M, neboli $\mathrm{span}(M) = \{u : u = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i : k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_k \in T, v_1, \dots, v_k \in M\}$

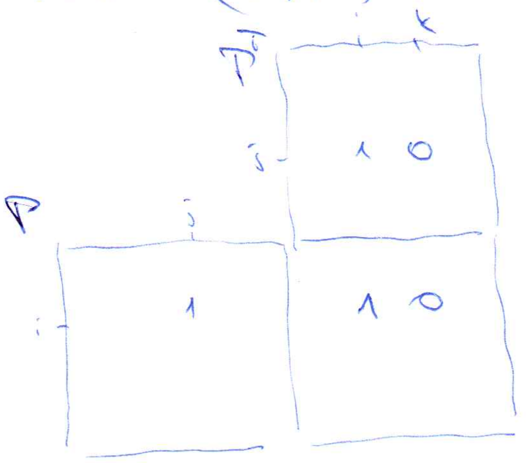
Příklad: sloupcový prostor matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, podprostor $\mathbb{R}^m$ generovaný sloupci matice A.

3. $A, P \in T^{n \times n}$

B je inverzní k A' $\Leftrightarrow$ $A' \cdot B = I_n$

Dosadíme $A' = P \cdot A$, $B = A^{-1} P^T$, potom

$$A' B = (P \cdot A) \cdot (A^{-1} P^T) = P \cdot (A \cdot A^{-1}) P^T = P \cdot I_n P^T = P \cdot P^T$$



$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow p(i) = j \Rightarrow (P^T)_{ji} = 1 \Rightarrow (PP^T)_{ii} = 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \dots = 1.$

def. permutační matice

... jednička v i-tém řádku P se potká s jedničkou v i-tém sloupci P^T

Podobně $(PP^T)_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ protože $p_{ij} = 1 \Rightarrow (P^T)_{ji} = 1 \Rightarrow (P^T)_{jk} = 0 \Rightarrow (PP^T)_{ik} = 0$

Ověřili jsme, že $PP^T = I_n$, tvrzení proto PLATÍ.

4. Vede. na soustavu s maticí

postupně odečteme zdola nahoru a přerovnáme

$$
\begin{array}{c}
\\ x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & f \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

$2b_5 = 0 \Rightarrow b_5 = 0$

$b_4 + (-1)\cdot 0 = -1 \Rightarrow b_4 = -1$

podobně $b_1, \ldots, b_3$ jsou v posl. sloupci.

$\Rightarrow$ řešením je vektor

$(1,-1,1,-1,0)^T = [f]_B.$

Zkouška: $1\cdot(x^4 + \cancel{x^3}) - 1\cdot(\cancel{x^3} + \cancel{x^2}) + 1\cdot(\cancel{x^2} + \cancel{x}) - 1\cdot(\cancel{x} + 1) + 0\cdot(x^5+1) =$

$x^4 - 1.$

Odpověď: souřadnice vektoru jsou $[f]_B = (1,-1,1,-1,0)^T.$