Jméno: Vzorové řešené zadání.

1. Definujte inverzní matici.
   Najděte matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, ale $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nejsou vzájemně inverzní.

2. Definujte transpozici.
   Určete znaménko permutace $(5, 3, 4, 1, 7, 6, 2)$ pomocí transpozic.

3. Definujte vektor souřadnic.
   V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše čtyři určete vektor souřadnic $[f]_X$ vektoru $f(x) = 3x^4 + 3x^3 + x + 3$ vzhledem k bázi $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$.

4. Vyslovte a dokažte větu o vztahu mezi řešeními $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

5. Přehledově sepište, co víte o vektorových prostorech a jejich podprostorech.
   (Uveďte prosím definice, věty, příklady a souvislosti. Důkazy nejsou vyžadovány.)

Pokud pojem definujete slovně, ukažte také, jak jej lze zavést pomocí matematického formalismu. Při formulaci vět a lemmat nezapomínejte na žádný z předpokladů. Zdůvodněte výsledky všech úloh.

Podmínky hodnocení – hodnotím i částečnou správnost

- jeden bod = jeden stupeň dolů
- na 1 (lze mít nejvýše jednu otázku špatně
  (nebo ekvivalent jedné otázky při částečné správnosti)
- alespoň částečně správné znění věty a idea důkazu jsou nutné pro absolvování zkoušky.

1. B je inverzní k čtvercové matici A pokud $AB = I_n$

Úloha: A není čtvercová .. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = I_2$

2. Transpozice je permutace s jedním cyklem délky 2. a $(n-2)$ cykly délky 1.

Úloha: Permutace má jeden netriviální cyklus $(1,5,7,2,3,4)$ a pevný bod (6). Cyklus lze rozložit jako

$$(1,4)\circ(1,3)\circ(1,2)\circ(1,7)\circ(1,5).$$

$$\operatorname{sign}(\pi) = -1^{\#\text{transpozic}} = -1^5 = -1.$$

3. Je-li X konečná báze prostoru V, $X = (v_1, \dots, v_n)$ potom vektor souřadnic vektoru u vzhledem k X je $[u]_X = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{K}^n$, kde $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Úloha: vyřešit $3x^4 + 3x^3 + x + 3 = a_1(x^4+x^3) + a_2(x^3+x^2) + a_3(x^2+x) + a_4(x+1) + a_5(x^4+1)$.

Dostaneme systém rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_4 = 2 \\ a_5 = 1 \end{array} \quad [f]_X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Má-li soustava $Ax=b$ alespoň jedno řešení x^0, potom je zobrazení $f: x \to x+x^0$ bijekce mezi množinami řešení $Ax=0$ a $Ax=b$.

Důkaz: a) f je zobrazení: $Ax=0 \Rightarrow A(x+x^0) = Ax + Ax^0 =$
$= 0 + b = b$.

b) f je prosté: $x \neq x' \Rightarrow f(x) - f(x') = (x+x^0) - (x'+x^0) = x - x' \neq 0$.

c) f je na: $Ax' = b \Rightarrow f(x'-x^0) = x'$ &
$A(x'-x^0) = Ax' - Ax^0 = b - b = 0$. □

5. Definice: Vektorový prostor V nad $\mathbb{K}$ je $(V,+,\cdot)$, kde $(V,+)$ je Abelovská grupa, $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ splňující:

1) $\forall u \in V: 1 \cdot u = u$, kde 1 je neutrální prvek $(\mathbb{K},\cdot)$,
2) $\forall a,b \in \mathbb{K}, \forall u \in V: (a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$
3) $\forall a,b \in \mathbb{K}, \forall u \in V: (a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
4) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u,v \in V: a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$.

Příklady: - aritmetický vekt. prostor $\mathbb{K}^n$
... uspořádané n-tice prvků z tělesa $\mathbb{K}$, $+,\cdot$ po složkách
- podobně (reálné) posloupnosti / funkce na stejné doméně
jednoměnné polynomy, spojité funkce
- podmnožiny jako vekt. prostor nad $\mathbb{Z}_2$, $+$ ... symetrická diference
- sudé podgrafy ———— // ————

Definice: U je podprostorem prostoru V nad $\mathbb{K}$, pokud:

1) $\forall u,v \in U: u+v \in U$ 2) $\forall u \in U\ \forall a \in \mathbb{K}: a \cdot u \in U$

Tvrzení: Podprostor je také prostorem nad stejným tělesem.

Nulový vektor patří do všech podprostorů.

Věta: Nechť $\{U_i, i \in I\}$ je systém podprostorů prostoru V.

Potom $\bigcap_{i \in I} U_i$ je podprostorem V.

Definice: Pro $X \subseteq V$ je lineární obal $\mathcal{L}(X)$ průnik všech podprostorů V obsahujících X

Definice: Lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$ je libovolný vektor, který lze vyjádřit jako $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, kde $a_i \in \mathbb{K}$.

Věta: $\mathcal{L}(X)$ obsahuje právě všechny lineární kombinace vektorů X.

Formálně: $\bigcap\{U : X \subseteq U\} = \{u : u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : x_i \in X, a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$

Příklady: Pro $V = \mathbb{R}^3$, $u \neq o$ $\mathcal{L}(u)$ je přímka procházející počátkem a u.

Analogicky pro nekolineární o, u, v je $\mathcal{L}(\{u,v\})$ rovina určená o, u a v.

Pro $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ máme prostory $\mathrm{Ker}(A) = \{x : Ax = o\} \subseteq \mathbb{K}^n$

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}(\text{řádky matice } A) = \{u : u = A^T x, x \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n$

$\mathcal{S}(A) = \mathcal{L}(\text{sloupce matice } A) = \{u : u = Ax, x \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$