

# Poznámky ke zkoušce z lineární algebry 1.

Seznam není vyčerpávající — může být požadována i znalost pojmů a skutečností, které zde nejsou výslovně uvedeny, ale jsou pokryty syllabem předmětu.

Definujte rozšířenou matici soustavy.

Definujte elementární řádkové operace.

Definujte odstupňovaný tvar matice.

Napište pseudokód pro Gaussovu eliminaci.

Definujte pivot a to slovně i formálně.

Definujte volné a bazické proměnné.

Definujte hodnotu matice.

Definujte jednotkovou matici.

Definujte transponovanou matici.

Definujte symetrickou matici.

Definujte maticový součin.

Definujte inverzní matici.

Definujte regulární matici.

Definujte singulární matici.

Definujte binární operaci.

Definujte komutativní a asociativní binární operace.

Definujte neutrální prvek v množině s binární operací.

Definujte inverzní prvek v množině s binární operací.

Definujte grupu.

Definujte Abelovskou grupu.

Definujte permutaci.

Definujte symetrickou grupu a určete její neutrální a inverzní prvky.

Definujte transpozici.

Definujte inverzi v permutaci.

Definujte znaménko permutace.

Definujte permutační matici.

Definujte těleso.

Definujte charakteristiku tělesa.

Definujte vektorový prostor.

Definujte podprostor vektorového prostoru.

Definujte lineární kombinaci.

Definujte podprostor generovaný množinou (lineární obal).

Definujte řádkový prostor matice a to slovně i formálně pomocí maticového součinu.

Definujte sloupcový prostor matice a to slovně i formálně pomocí maticového součinu.

Definujte jádro matice.

Definujte množinu lineárně nezávislých vektorů.

Definujte bázi vektorového prostoru.

Definujte dimenzi vektorového prostoru.

Definujte vektor souřadnic.

Definujte lineární zobrazení.

Definujte afinní prostor a jeho dimenzi.

Definujte jádro lineárního zobrazení.

Definujte matici lineárního zobrazení.

Definujte matici přechodu.

Definujte isomorfismus vektorových prostorů.

Uveďte a dokažte vztah mezi elementárními řádkovými operacemi a soustavami rovnic.

Vyslovte a dokažte větu o jednoznačnosti volných a bazických proměnných. (Týká se indexů proměnných, nikoli jejich hodnot.)

Vyslovte a dokažte Frobeniovu větu o existenci řešení soustavy.

Vyslovte a dokažte větu o vztahu mezi řešeními  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  a  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ .

Uveďte a dokažte větu popisující všechna řešení  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Vyslovte a dokažte tvrzení o vlastnostech maticového součinu (asociativita, distributivita, ...).

Vyslovte a dokažte větu o ekvivalentních definicích regulárních matic.

Vyslovte a dokažte větu o znaménku složené permutace.

Uveďte a dokažte větu charakterizující, kdy  $\mathbb{Z}_n$  je těleso.

Vyslovte a dokažte malou Fermatovu větu.

Vyslovte a dokažte větu o průniku vektorových prostorů (více než jen dvou).

Vyslovte a dokažte větu o ekvivalentních definicích lineárního obalu včetně formálního zápisu příslušných množin.

Vyslovte a dokažte tvrzení o mohutnostech lineárně nezávislé množiny a generující množiny.

Uveďte a dokažte Steinitzovu větu o výměně. Kompletně vyslovená věta odpovídá formulaci věty o výměně ve formě o nezávislých a generujících množinách formulaci lemmatu o výměně. Pokud v důkazu věty využijete lemma o výměně, je třeba i toto lemma dokázat.

Vyslovte a dokažte větu o dimenzi průniku vektorových prostorů (tzv. věta o průniku a spojení).

Vyslovte a dokažte větu o vektorových prostorech souvisejících s maticí  $\mathbf{A}$ . Kompletně vyslovená věta odpovídá formulaci věty o dimenzích a formulaci lemmatu o bázi sloupcového prostoru. Pokud v důkazu věty využijete uvedené lemma, je ho třeba také dokázat.

Vyslovte a dokažte větu o dimenzi jádra matice.

Vyslovte a dokažte větu o jedinečnosti lineárního zobrazení.

Vyslovte a dokažte tvrzení, že převod na vektor souřadnic je lineární zobrazení.

Vyslovte a dokažte pozorování o matici složeného lineárního zobrazení.

Vyslovte a dokažte větu o charakterizaci isomorfismu mezi vektorovými prostory pomocí matic.

Vyslovte a dokažte větu o řešení rovnice s lineárním zobrazením.

Zformulujte problém o počtu sudých podgrafů a vyřešte jej.

Zformulujte problém o množinových systémech s omezeními na mohutnosti a vyřešte jej.

Zformulujte problém o dělení obdélníku na čtverce a vyřešte jej.

Přehledově sepište, co víte o elementárních řádkových operacích a Gaussově eliminaci. Mimo jiné zdefinujte formálně elementární řádkové operace, zdefinujte odstupňovaný tvar matice a zapište pseudokód Gaussovy eliminace.

Přehledově sepište, co víte o řešení homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic. Mimo jiné zdefinujte formálně homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic, množiny jejich řešení, a volné a bazické proměnné.

Přehledově sepište, co víte o maticových operacích. Mimo jiné zdefinujte formálně maticový součin a tvrzení o jeho asociativitě a distributivitě.

Přehledově sepište, co víte o regulárních a singulárních maticích. Mimo jiné zdefinujte formálně regulární matice a vyslovte větu o jejich charakterizaci.

Přehledově sepište, co víte o binárních operacích a jejich vlastnostech. Mimo jiné zdefinujte binární operaci na množině a její možné vlastnosti.

Přehledově sepište, co víte o (obecných) grupách. Mimo jiné zdefinujte obecnou grupu pomocí axiomů a vypište vztahy, které v obecné grupě platí.

Přehledově sepište, co víte o permutačních grupách. Mimo jiné zdefinujte formálně permutaci, příslušnou grupovou operaci a znaménko permutace.

Přehledově sepište, co víte o tělesech. Mimo jiné zdefinujte těleso pomocí axiomů a запиšte vztahy, které v tělese platí.

Přehledově sepište, co víte o vektorových prostorech a jejich podprostorech. Mimo jiné zdefinujte vektorový prostor pomocí axiomů, zdefinujte formálně podprostor a запиšte vztahy, které v něm platí.

Přehledově sepište, co víte o vektorových prostorech určených maticí  $\mathbf{A}$ . Mimo jiné zdefinujte formálně příslušné prostory, запиšte jejich vztahy a vztahy jejich dimenzí.

Přehledově sepište, co víte o lineární závislosti. Mimo jiné zdefinujte formálně lineární (ne)závislost a запиšte vztahy, jak se mění vzhledem k množinovým operacím.

Přehledově sepište, co víte o bázích vektorových prostorů. Mimo jiné zdefinujte formálně bázi a vektor souřadnic, a také uveďte větu o výměně a její důsledky.

Přehledově sepište, co víte o lineárních zobrazeních. Mimo jiné zdefinujte formálně lineární zobrazení, větu o rozšíření a vztahy jeho možných vlastností k dimenzím prostorů.

Přehledově sepište, co víte o maticích lineárních zobrazení. Mimo jiné zdefinujte formálně matici lineárního zobrazení a popište formální vztahy, jak se používá.

Přehledově sepište, co víte o afinních prostorech. Mimo jiné zdefinujte formálně afinní prostor a jeho dimenzi (coby podmnožinu vektorového prostoru) a zformulujte větu o řešení rovnice s lineárním zobrazením.

(U přehledových otázek uveďte definice, tvrzení, věty, příklady a souvislosti. Důkazy u přehledových otázek nejsou vyžadovány.)

Dále (zejména pro řešení úloh) je třeba zručně ovládat následující postupy (nad tělesy  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$ ):

Převést matici do odstupňovaného tvaru a určit její hodnotu

Rozhodnout o regularitě čtvercových matic.

Vyřešit homogenní i nehomogenní soustavu lineárních rovnic Gaussovou eliminací a zpětnou substitucí.

Transponovat, násobit a invertovat matice.

Upravovat maticové výrazy.

Skládat, invertovat a určit znaménka permutací.

Rozhodnout o lineární závislosti daných aritmetických vektorů.

Vybrat bázi ze systému generátorů.

Určit souřadnice aritmetického vektoru vůči dané bázi.

Určit dimenzi vektorového prostoru.

Určit matici lineárního zobrazení z obrazů vektorů.

Určit matici přechodu mezi danými bázemi.