Geometrický problém

Problém: Lze obdélník s iracionálním poměrem délek jeho stran rozdělit na konečně mnoho čtverců?

Poznámka: Pro racionální $p:q$ vezmeme pq jednotkových čtverců.

Věta: Pro iracionální poměr žádné takové rozdělení neexistuje.

Důkaz: Nechť má obdélník R délky stran $1:x$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Zde jsou 1 a x lineárně nezávislé.

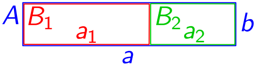
Zvolme libovolné lineární $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(1) = 1$ a $f(x) = -1$.

Takové zobrazení f existuje, protože je dán obraz části báze.

Pro A o stranách a, b definujeme „plochu“ jako $v(A) = f(a)f(b)$.

Pokud postupně rozdělíme A na $B_1, \ldots, B_k$, pak $v(A) = \sum_{i=1}^{k} v(B_i)$.

... dělíme-li A na B_1 a B_2, pak $v(A) = v(B_1) + v(B_2)$.



$f(a)f(b) = f(a_1 + a_2)f(b) = (f(a_1) + f(a_2))f(b) = f(a_1)f(b) + f(a_2)f(b)$

Geometrický problém

Problém: Lze obdélník s iracionálním poměrem délek jeho stran rozdělit na konečně mnoho čtverců?

Poznámka: Pro racionální $p : q$ vezmeme pq jednotkových čtverců.

Věta: Pro iracionální poměr žádné takové rozdělení neexistuje.

Důkaz: Nechť má obdélník R délky stran $1 : x$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Zde jsou 1 a x lineárně nezávislé.

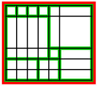
Zvolme libovolné lineární $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(1) = 1$ a $f(x) = -1$.

Takové zobrazení f existuje, protože je dán obraz části báze.

Pro A o stranách a, b definujeme „plochu“ jako $v(A) = f(a)f(b)$.

Pokud postupně rozdělíme A na $B_1, \ldots, B_k$, pak $v(A) = \sum_{i=1}^{k} v(B_i)$.

Kdyby R šlo rozdělit na čtverce $A_1, \ldots, A_k$ o stranách délek $a_1, \ldots, a_k$, tak zjemníme rozdělení podél jejich stran na obdélníky $B_1, \ldots, B_l$ a dostaneme spor:



R
A_i
B_j

$$-1 = f(1)f(x) = v(R) = \sum_{j=1}^{l} v(B_j) = \sum_{i=1}^{k} v(A_i) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)^2 \geq 0$$