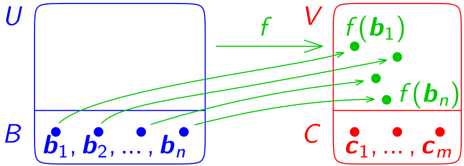
Matice lineárního zobrazení

Definice: Nechť U a V jsou vektorové prostory nad tělesem T s uspořádanými bázemi $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$.

Matice lineárního zobrazení $f : U \to V$ vzhledem k bazím B a C je $[f]_{B,C} \in T^{m \times n}$, jejíž sloupce jsou vektory souřadnic obrazů vektorů báze B vzhledem k bázi C.

Formálně: $[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(\boldsymbol{b}_1)]_C & \ldots & [f(\boldsymbol{b}_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$.



$[f]_{B,C} = ([f(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [f(\boldsymbol{b}_n)]_C)$

Použití matice lineárního zobrazení

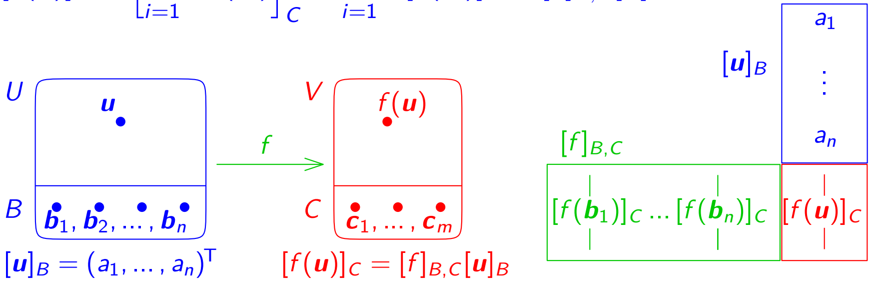
Matice zobrazení je $[f]_{B,C} = ([f(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [f(\boldsymbol{b}_n)]_C)$.

Pozorování: Pro libovolné $\boldsymbol{u} \in U$ platí: $[f(\boldsymbol{u})]_C = [f]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B$.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i$, neboli $[\boldsymbol{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$.

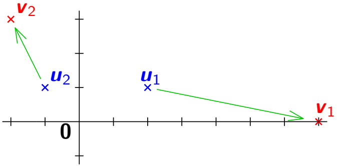
Potom $f(\boldsymbol{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{b}_i)$, a tudíž i:

$$[f(\boldsymbol{u})]_C = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{b}_i)\right]_C = \sum_{i=1}^{n} a_i [f(\boldsymbol{b}_i)]_C = [f]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B.$$



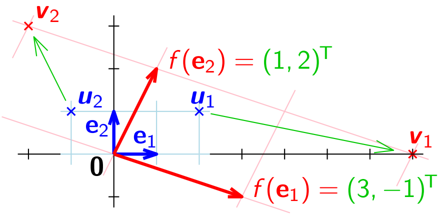
Matice lineárního zobrazení v rovině

Vzhledem ke standardní bázi E určete matici zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí $\boldsymbol{u}_1 = (2,1)^\mathsf{T}$ na $\boldsymbol{v}_1 = (7,0)^\mathsf{T}$ a $\boldsymbol{u}_2 = (-1,1)^\mathsf{T}$ na $\boldsymbol{v}_2 = (-2,3)^\mathsf{T}$.



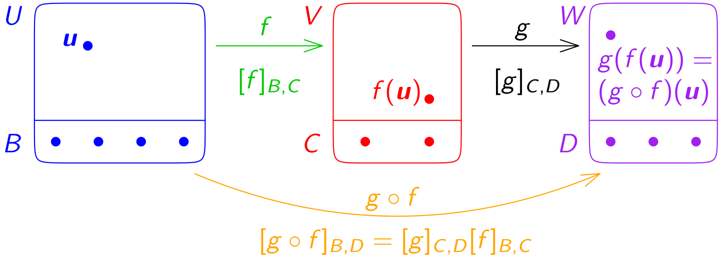
Matice musí splňovat $[f]_{E,E}[\boldsymbol{u}_i]_E = [\boldsymbol{v}_i]_E$ pro $i = 1, 2$, neboli:

$$[f]_{E,E}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; [f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Složení lineárních zobrazení

Pozorování: Mějme vektorové prostory U, V a W s konečnými uspořádanými bázemi B, C a D. Pro matice lineárních zobrazení $f : U \to V$ a $g : V \to W$ platí vztah: $[g \circ f]_{B,D} = [g]_{C,D}[f]_{B,C}$



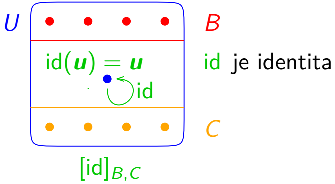
Důkaz: Pro všechny $\boldsymbol{u} \in U : [(g \circ f)(\boldsymbol{u})]_D = [g \circ f]_{B,D}[\boldsymbol{u}]_B$, také:

$[(g \circ f)(\boldsymbol{u})]_D = [g(f(\boldsymbol{u}))]_D = [g]_{C,D}[f(\boldsymbol{u})]_C = [g]_{C,D}[f]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B$.

Dosadíme-li za $\boldsymbol{u}$ i-tý vektor báze B, máme $[\boldsymbol{u}]_B = \mathbf{e}_i$ a ze vztahu $[g \circ f]_{B,D}\,\mathbf{e}_i = ([g]_{C,D}[f]_{B,C})\mathbf{e}_i$ plyne, že matice mají i-té sloupce shodné. Proto platí $[g \circ f]_{B,D} = [g]_{C,D}[f]_{B,C}$.

Matice přechodu

Definice: Nechť B a C jsou dvě konečné uspořádané báze vektorového prostoru U. *Matice přechodu* od B k C je $[\mathrm{id}]_{B,C}$.



Pozorování: Pro každé $\boldsymbol{u} \in U$ platí:
$[\boldsymbol{u}]_C = [\mathrm{id}(\boldsymbol{u})]_C = [\mathrm{id}]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B$.

Pozorování: Protože $[\mathrm{id}]_{C,B}[\mathrm{id}]_{B,C} = [\mathrm{id}]_{B,B} = \mathbf{I}$,
je každá matice přechodu regulární a platí: $[\mathrm{id}]_{C,B} = ([\mathrm{id}]_{B,C})^{-1}$.

Postup: Výpočet matice přechodu $[\mathrm{id}]_{B,C}$ od báze B k C v T^n:

Pro $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ položme $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{c}_1 & \ldots & \boldsymbol{c}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

Pro $\boldsymbol{u} \in T^n : \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{B}[\boldsymbol{u}]_B$, kde $[\boldsymbol{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$,

a obdobně $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} d_i \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{u}]_C$ pro $[\boldsymbol{u}]_C = (d_1, \ldots, d_n)^{\mathsf{T}}$.

Z $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}[\boldsymbol{u}]_B = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{u}]_C$ plyne: $[\boldsymbol{u}]_C = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{u}]_B = [\mathrm{id}]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B$.

Trik: Součin lze ušetřit: $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{B}) \sim\sim (\mathbf{I}|\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}) = (\mathbf{I}|[\mathrm{id}]_{B,C})$.

Ukázka

V prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ určete matici přechodu
od $B = ((2,3,0,2)^\mathsf{T}, (1,1,1,1)^\mathsf{T}, (2,0,3,3)^\mathsf{T}, (1,4,2,0)^\mathsf{T})$
k $C = ((1,2,0,1)^\mathsf{T}, (2,0,3,3)^\mathsf{T}, (3,1,4,1)^\mathsf{T}, (4,2,0,1)^\mathsf{T})$.

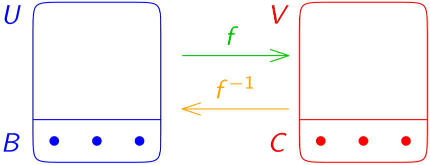
Vytvoříme matici, sloupce na levé straně jsou z C, vpravo z B.
Gaussovou-Jordanovou eliminací převedeme levou stranu na $\mathbf{I}$.
Vpravo se pak objeví matice přechodu $[\mathrm{id}]_{B,C}$, čili od B k C.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matice přechodu od báze B k bázi C je $[\mathrm{id}]_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Charakterizace matic isomorfismu

Věta: Lineární zobrazení $f : U \to V$ je isomorfismus prostorů U a V s konečnými bázemi B a C právě tehdy, když $[f]_{B,C}$ je regulární.



Důkaz:

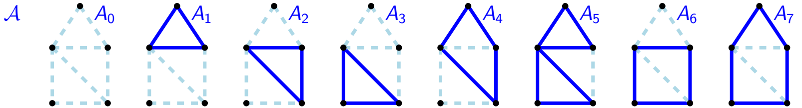
$\Leftarrow$: Uvažme $g : V \to U$ takové, že $[g]_{C,B} = ([f]_{B,C})^{-1}$. Pak:
$[g \circ f]_{B,B} = ([f]_{B,C})^{-1}[f]_{B,C} = \mathbf{I}_{|B|} = [\mathrm{id}]_{B,B} \;\Rightarrow\; f$ je prosté,
$[f \circ g]_{C,C} = [f]_{B,C}([f]_{B,C})^{-1} = \mathbf{I}_{|C|} = [\mathrm{id}]_{C,C} \;\Rightarrow\; f$ je „na“.

$\Rightarrow$: Protože $f(U) = V$ a $f^{-1}(V) = U$, máme $\dim(U) = \dim(V)$.
Matice $[f]_{B,C}$ je čtvercová a splňuje $[f^{-1}]_{C,B}[f]_{B,C} = [\mathrm{id}]_{B,B} = \mathbf{I}$.

Důsledek: Je-li f isomorfismus, pak platí: $[f^{-1}]_{C,B} = ([f]_{B,C})^{-1}$.

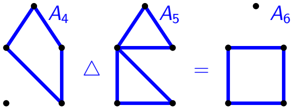
Ukázka isomorfismu

Nechť $(\mathcal{A}, \triangle)$ je vektorový prostor sudých podgrafů grafu G nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_2^3$ dané následující tabulkou je lineární a bijektivní, proto jde o isomorfismus.



$f(A_i)$:$(0,0,0)^\mathsf{T}$ $(1,0,0)^\mathsf{T}$ $(0,1,0)^\mathsf{T}$ $(0,0,1)^\mathsf{T}$ $(1,1,0)^\mathsf{T}$ $(1,0,1)^\mathsf{T}$ $(0,1,1)^\mathsf{T}$ $(1,1,1)^\mathsf{T}$

Linearita platí, např.



$(1,1,0)^\mathsf{T} + (1,0,1)^\mathsf{T} = (0,1,1)^\mathsf{T}$

$f(A_4) + f(A_5) = f(A_4 \triangle A_5) = f(A_6)$

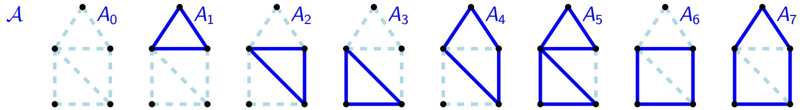
Matice zobrazení závisí na obou zvolených bazích.

Např. $[f]_{(A_1,A_2,A_3),\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dimenze obou prostorů je 3.

Použití matice zobrazení

Pro jinou volbu $B = (A_4, A_5, A_1)$ dostaneme $[f]_{B,\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



$f(A_i)$:$(0,0,0)^\mathsf{T}$ $(1,0,0)^\mathsf{T}$ $(0,1,0)^\mathsf{T}$ $(0,0,1)^\mathsf{T}$ $(1,1,0)^\mathsf{T}$ $(1,0,1)^\mathsf{T}$ $(0,1,1)^\mathsf{T}$ $(1,1,1)^\mathsf{T}$

Všimněte si, že platí vztah $[f]_{B,\mathrm{E}}[A]_B = [f(A)]_\mathrm{E}$.
Např. pro A_6 dostaneme: $A_6 = A_4 \triangle A_5$, a tedy $[A_6]_B = (1,1,0)^\mathsf{T}$.
Nyní:

$$[f]_{B,\mathrm{E}}[A_6]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [f(A_6)]_\mathrm{E}$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je různých lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^1$?
   a) žádné b) 3 c) 5 d) 9 e) 15 f) 75 g) 125
2. Která z následujících matic je matice rotace o $90°$ po směru hodinových ručiček vzhledem k standardní bázi?
   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Má-li matice zobrazení $f : U \to V$ nulový sloupec, potom
   a) f není na b) f není prosté c) $\forall \boldsymbol{u} \in U : f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
   d) vzor $\boldsymbol{0}$ je alespoň dvouprvková množina.
4. Pravda nebo lež: Je-li $\boldsymbol{A}$ libovolná matice lineárního zobrazení $f : U \to U$, pak $\boldsymbol{A}^3$ je maticí $f \circ f \circ f$ vůči stejnému páru bází.
5. Pokud pro $f : U \to V$ platí, že f je isomorfismem mezi U a $f(U)$, potom $\operatorname{rank}([f]_{B,C})$
   a) $< \dim(U)$, b) $< \dim(V)$, c) $= \dim(U)$, d) $= \dim(V)$,
   e) $\leq \dim(U)$, f) $\leq \dim(V)$, g) závisí na volbě B a C.

Komentář k řešení kvízu

1. Každé takové zobrazení lze reprezentovat maticí ze $\mathbb{Z}_5^{1\times 3}$ vůči dvěma pevně zvoleným bázím. Takových matic je 5^3. Jinými slovy, tolik je různých obrazů báze $\mathbb{Z}_5^3$ v $\mathbb{Z}_5^1$.
2. Sloupce jsou: $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2 = (0, -1)^\mathsf{T}$ a $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 = (1, 0)^\mathsf{T}$.
3. Pro vektor $\boldsymbol{b}_i$ báze prostoru U, který odpovídá nulovému sloupci platí $f(\boldsymbol{b}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Má-li matice nenulový sloupec, neplatí c) a je-li V je obrazem U, neplatí a).
4. Nemusí platit, je-li $\boldsymbol{A} = [f]_{B,C}$ vůči různým bázím $B \neq C$. Např. pro $f = \mathrm{id}$ a $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{I}_2$ je $\boldsymbol{A}^3 = 8\mathbf{I}_2 \neq 2\mathbf{I}_2 = [f \circ f \circ f]_{B,C}$.
5. Sloupce $[f]_{B,C}$ vždy generují $f(U)$ a u isomorfismu jsou lineárně nezávislé: $\mathrm{rank}([f]_{B,C}) = \dim(f(U)) = \dim(U)$. Odtud c) a e). Protože $f(U)$ je podprostorem V, platí i f).

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Co lze říct o zobrazeních, jejichž matice je jednotková, případně permutační?
- Je snazší určit matici přechodu od kanonické báze nebo ke kanonické bázi?
- Co dostaneme, vynásobíme-li matici zobrazení $[f]_{B,C}$ maticí inverzního zobrazení $[f^{-1}]_{D,B}$?
- Jak spolu souvisí hodnost matice zobrazení a vlastnosti zobrazení, jestli je prosté anebo „na“?
- Jdou-li složit dva isomorfismy mezi prostory konečné dimenze, bude výsledné zobrazení opět isomorfismem?