

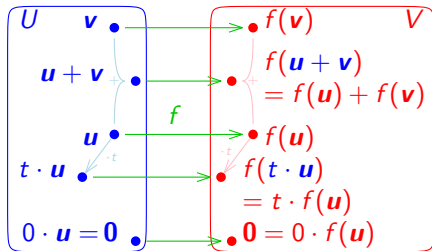
Lineární zobrazení

Pozorování: Necht' $\mathbf{A} \in T^{m \times n}$ a zobrazení $f : T^n \rightarrow T^m$ je definováno vztahem $f(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Pak platí:

- ▶ $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- ▶ $f(t \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{A}(t \cdot \mathbf{u}) = t \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = t \cdot f(\mathbf{u})$

Definice: Necht' U a V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $f : U \rightarrow V$ nazveme *lineární*, pokud splňuje:

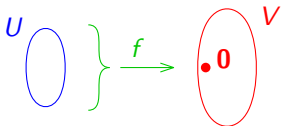
- ▶ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U :$
 $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- ▶ $\forall \mathbf{u} \in U, \forall t \in T :$
 $f(t \cdot \mathbf{u}) = t \cdot f(\mathbf{u})$



Pozorování: Pro každé lineární zobrazení platí: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ukázky jednoduchých lineárních zobrazení

Mezi obecnými vektorovými prostory $f : U \rightarrow V$ nad stejným T .
Triviální lineární zobrazení dané předpisem: $\forall u \in U : f(u) = 0$.



Identita id jako zobrazení na U dané $\forall u \in U : \text{id}(u) = u$.



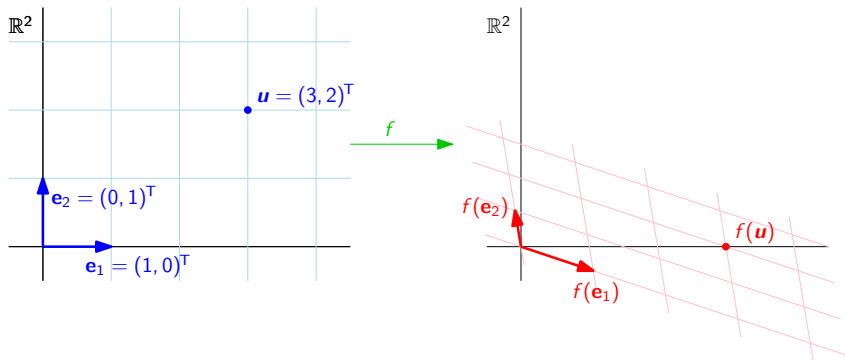
Identita může být brána i jako vnoření U do V , je-li $U \subseteq V$.

V těchto případech je linearita součtu i skalárního násobku zjevná.

Geometrická lineární zobrazení

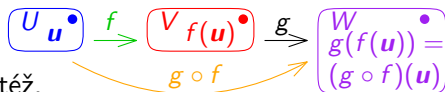
Geometrické transformace v \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 , které fixují počátek:

- ▶ rotace kolem počátku
- ▶ osová souměrnost podle osy procházející počátkem
- ▶ stejnoolehlost se středem v počátku, včetně projekce
- ▶ jakákoli transformace, která kombinuje výše uvedené



Vlastnosti lineárních zobrazení

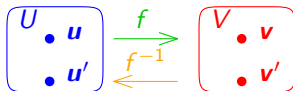
Pozorování: Jsou-li $f : U \rightarrow V$,
 $g : V \rightarrow W$ lineární zobrazení,
pak $(g \circ f) : U \rightarrow W$ je lineární též.



Důkaz: $(g \circ f)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = g(f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})) =$
 $= g(f(\mathbf{u})) + g(f(\mathbf{v})) = (g \circ f)(\mathbf{u}) + (g \circ f)(\mathbf{v})$
 $(g \circ f)(t\mathbf{u}) = g(f(t\mathbf{u})) = g(tf(\mathbf{u})) = tg(f(\mathbf{u})) = t(g \circ f)(\mathbf{u})$

Pozorování: Jestliže $f : U \rightarrow V$ je bijektivní lineární zobrazení,
je i $f^{-1} : V \rightarrow U$ lineární zobrazení.

Důkaz: Pro jakákoli $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$
necht' $\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{v})$ a $\mathbf{u}' = f^{-1}(\mathbf{v}')$,
neboli $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ a $f(\mathbf{u}') = \mathbf{v}'$.



Linearita součtu: $f^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f^{-1}(f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{u}')) =$
 $f^{-1}(f(\mathbf{u} + \mathbf{u}')) = \mathbf{u} + \mathbf{u}' = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}')$

Linearita skalárního násobku:

$\forall t \in T : f^{-1}(t\mathbf{v}) = f^{-1}(tf(\mathbf{u})) = f^{-1}(f(t\mathbf{u})) = t\mathbf{u} = tf^{-1}(\mathbf{v})$.

Definice: Bijektivní lineární zobrazení se nazývá *isomorfismus*.

Transformace na vektor souřadnic

Tvrzení: Necht' U je prostor nad T s bazí $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$.

Potom zobrazení $f : U \rightarrow T^n$ definované $f(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]_B$ je lineární.

Důkaz: Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ vyjádříme $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i$, čili

vektory souřadnic jsou $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$, $[\mathbf{v}]_B = (c_1, \dots, c_n)^T$.

Linearita součtu: $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = [\mathbf{u} + \mathbf{v}]_B = \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i \right]_B =$

$$= \left[\sum_{i=1}^n (a_i + c_i) \mathbf{b}_i \right]_B = (a_1 + c_1, \dots, a_n + c_n)^T =$$

$$= (a_1, \dots, a_n)^T + (c_1, \dots, c_n)^T = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{v}]_B = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

Linearita skalárního násobku:

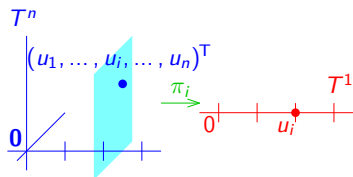
$$\text{Pro } t \in T : f(t\mathbf{u}) = [t\mathbf{u}]_B = \left[t \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i \right]_B = \left[\sum_{i=1}^n t a_i \mathbf{b}_i \right]_B =$$

$$= (t a_1, \dots, t a_n)^T = t(a_1, \dots, a_n)^T = t[\mathbf{u}]_B = t f(\mathbf{u})$$

Pozorování: Zobrazení $\mathbf{u} \leftrightarrow [\mathbf{u}]_B$ je bijekce, neboli isomorfismus.

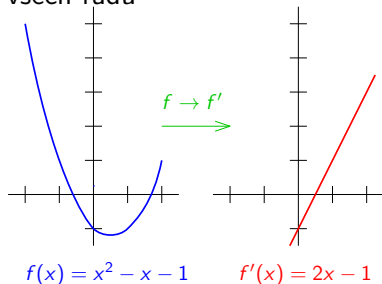
Další ukázky lineárních zobrazení

V aritmetických vektorových prostorech je *projekce* na i -tou souřadnici, čili $\pi_i : T^n \rightarrow T^1$ dané $\pi_i((u_1, \dots, u_n)^T) = u_i$, lineární zobrazení.



Pozn.: Píšeme jen u_i namísto formálně korektního $(u_i)^T$.

Na prostoru funkcí s derivacemi všech řádů

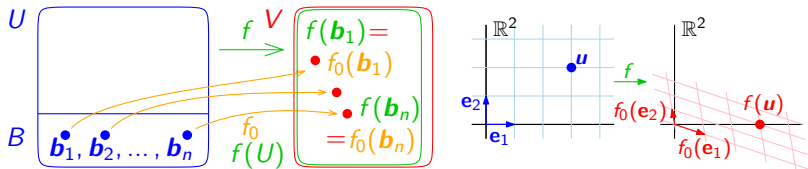


je i *derivace* lineární zobrazení:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(t \cdot f(x))' = t \cdot f'(x)$$

Věta o rozšiřitelnosti

Věta: Necht' U a V jsou prostory nad T a B je báze U .
Pak pro jakékoli zobrazení $f_0 : B \rightarrow V$ existuje jediné lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ rozšiřující f_0 , t.j. $\forall \mathbf{b} \in B : f(\mathbf{b}) = f_0(\mathbf{b})$.



Důkaz: Pro jakékoli $\mathbf{u} \in U$ existují jednoznačná $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_n \in T \setminus \{0\}$ a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in B$ taková, že $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i$.

Potom $f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\mathbf{b}_i) = \sum_{i=1}^n a_i f_0(\mathbf{b}_i)$.

Důsledek: Pokud je $f : U \rightarrow V$ lineární, pak $\dim(U) \geq \dim(f(U))$, protože obraz $f(B)$ báze B prostoru U generuje $f(U)$.

Afinní prostory

Definice: Necht' W je podprostor vektorového prostoru U a $u \in U$.

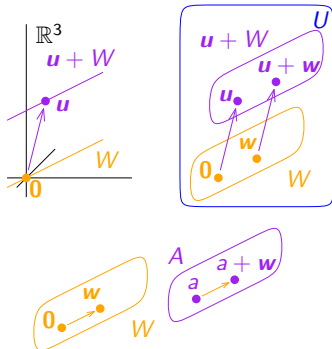
Afinní (pod)prostor $u + W$ je množina $\{u + w : w \in W\}$.

Dimenze afinního prostoru $u + W$ je $\dim(u + W) = \dim(W)$.

Ukázka: Přímký a roviny (a nadroviny) v obecné poloze v \mathbb{R}^3 (v \mathbb{R}^d).

Poznámka: Afinní prostor lze definovat obecněji jako množinu A a zobrazení $+$: $A \times W \rightarrow A$ splňující:

- ▶ $\forall a \in A, \forall v, w \in W :$
 $a + (v + w) = (a + v) + w$
- ▶ $\forall a, b \in A \exists ! v \in W : a + v = b$



Prvky množiny A se nazývají **body** (nejde o skaláry ani o vektory).

Pozorování: Pro každé $a \in A$ platí: $a + 0 = a$.

Důkaz: Necht' v je unikátní vektor splňující $a + v = a$. Potom platí:
 $a = a + v = (a + v) + v = a + (v + v) \Rightarrow v = v + v \Rightarrow v = 0$.

Vzor vektoru v lineárním zobrazení

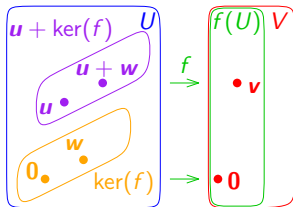
Definice:

Jádro lineárního zobrazení $f : U \rightarrow V$

je $\ker(f) = \{w \in U : f(w) = 0\}$.

Pozorování: Jádro je *vektorový* podprostor.

Pozorování: Pro $f : T^n \rightarrow T^m$ dané $f(x) = Ax$ je $\ker(f) = \ker(A)$.



Věta: Necht' $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pro libovolné $v \in V$, rovnice $f(x) = v$ buď nemá žádné řešení, nebo řešení tvoří afinní podprostor $u + \ker(f)$, kde u je libovolné řešení rovnice $f(x) = v$.

Ukázky: Řešení soustav $Ax = b$; konstanta $+c$ při integrování.

Důkaz: Když $x \in u + \ker(f)$, pak $x = u + w$ pro $w \in \ker(f)$.

Nyní $f(x) = f(u + w) = f(u) + f(w) = v + 0 = v$.

Naopak, pro $f(x) = v$ platí $f(x - u) = f(x) - f(u) = v - v = 0$, čili $x - u \in \ker(f)$, a odtud $x \in u + \ker(f)$.

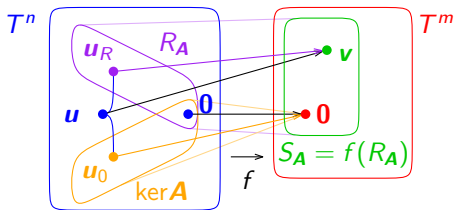
Bonus: krátký důkaz věty, že $\dim R_A = \dim S_A$

Pro $A \in T^{m \times n}$ mějme zobrazení $f : T^n \rightarrow T^m$ dané $f(x) = Ax$. Víme, že $S_A = f(T^n)$. Dokonce ukážeme, že $S_A = f(R_A)$.

Pro každé $v \in S_A$ existuje $u \in T^n$ takové, že $f(u) = v$.

Protože $\dim R_A + \dim(\ker A) = n$ a přitom $R_A \cap \ker A = 0$, tvoří sjednocení bází R_A a $\ker A$ bázi T^n . Vektor u lze tudíž rozložit $u = u_R + u_0$, kde $u_R \in R_A$ a $u_0 \in \ker A$. Dostáváme:

$$v = f(u) = f(u_R + u_0) = f(u_R) + f(u_0) = f(u_R) + 0 = f(u_R)$$



Ze vztahu $f(R_A) = S_A$ vyplývá $\dim R_A \geq \dim S_A$.

Z $f(R_{A^T}) = S_{A^T}$ vyplývá $\dim S_A = \dim R_{A^T} \geq \dim S_{A^T} = \dim R_A$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je různých lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^1$?
a) žádné b) 3 c) 5 d) 9 e) 15 f) 75 g) 125
2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = (x_1, x_3)^T$
a) je lineární a lze ho zapsat jako složení dvou projekcí $\pi_1 \circ \pi_3$
b) je lineární, ale není složením žádných dvou projekcí $\pi_i \circ \pi_j$
c) není lineární zobrazení
3. Pravda nebo lež: Inverzní zobrazení ke složení lineárních zobrazení $g \circ f$ je zobrazení $g^{-1} \circ f^{-1}$ a je dokonce lineární.
4. Je-li f isomorfismus, pak $\ker(f)$ je:
a) \emptyset b) $\{\emptyset\}$ c) 0 d) $\{0\}$ e) $\mathbf{0}$ f) $\{\mathbf{0}\}$
g) $\mathbf{0}_n$ h) $\{\mathbf{0}_n\}$ i) $\mathbf{0}_{m,n}$ j) $\{\mathbf{0}_{m,n}\}$ k) něco nenulového
5. Pravda nebo lež: Afinní podprostor obsahuje $\mathbf{0}$, právě když je vektorovým podprostorem.

Komentář k řešení kvízu

1. Lineární zobrazení uvažujeme jen pro prostory nad stejným tělesem, zde se liší \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_3 .
2. Oborem hodnot projekce je jednodimenzionální prostor.
3. Inverzí je zobrazení $f^{-1} \circ g^{-1}$, jinak ani nejdou složit.
4. Vzorem nulového vektoru je množina obsahující nulový vektor. Je-li zobrazení prosté, další vektory už obsahovat nemůže.
5. Vektorový podprostor W je i afinním podprostorem $\mathbf{0} + W$. Tento afinní podprostor obsahuje $\mathbf{0}$, neboť $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Obráceně, afinní podprostor $\mathbf{0} + W$ je uzavřený na sčítání i na skalární násobky a proto je vektorovým prostorem.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Pro který z axiomů lineárního zobrazení je nutné, aby oba prostory byly nad stejným tělesem?
- ▶ Jsou-li $f(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $g(\mathbf{u}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$, a jdou-li složit, čemu pak odpovídá zobrazení $g \circ f$?
- ▶ Která ze zobrazení v ukázkách jsou isomorfismy a která ne?
- ▶ Proč je ve větě o rozšiřitelnosti třeba jednoznačnost n a nenulovost koeficientů a_i ?
- ▶ Jaké vlastnosti by muselo mít zobrazení f_0 z věty o rozšiřitelnosti, aby f bylo prosté, resp. aby bylo „na“ nebo aby bylo isomorfismem?
- ▶ Proč je obraz $f(U)$ prostoru U podprostorem V a nikoli jen podmnožinou?

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Je lineární zobrazení jednoznačně určeno obrazem lineárně nezávislé množiny nebo obrazem systému generátorů?
- ▶ Všimněte si, že obrazy lineárních zobrazení lze sčítat i násobit skalárem a tak definovat jejich součet i skalární násobek. Jakou algebraickou strukturu tvoří množina všech lineárních zobrazení $\{f : U \rightarrow V\}$ s těmito dvěma operacemi?
- ▶ Jaká je geometrická interpretace afinních podprostorů v \mathbb{R}^3 ?
- ▶ Mohou mít dva různé afinní prostory stejné dimenze netriviální průnik? Lze to i jsou-li určeny stejným podprostorem W ?