Prostory určené maticí $\boldsymbol{A} \in T^{m\times n}$

Definice: *Jádro* $\boldsymbol{A}$ je množina řešení $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, značí se $\ker \boldsymbol{A}$,
sloupcový prostor je podprostor T^m generovaný sloupci $\boldsymbol{A}$,
řádkový prostor je podprostor T^n gen. transpozicemi řádků $\boldsymbol{A}$.

Ukázka: Pro matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 4}$ dostaneme

řádkový prostor:

$$R_{\boldsymbol{A}} = \left\{ \begin{matrix} (0,0,0,0)^\mathsf{T}, & (1,2,0,1)^\mathsf{T}, & (2,1,0,2)^\mathsf{T}, \\ (2,0,2,1)^\mathsf{T}, & (0,2,2,2)^\mathsf{T}, & (1,1,2,0)^\mathsf{T}, \\ (1,0,1,2)^\mathsf{T}, & (2,2,1,0)^\mathsf{T}, & (0,1,1,1)^\mathsf{T} \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$$

sloupcový prostor:

$$S_{\boldsymbol{A}} = \left\{ \begin{matrix} (0,0,0)^\mathsf{T}, & (1,2,1)^\mathsf{T}, & (2,1,2)^\mathsf{T}, \\ (2,0,1)^\mathsf{T}, & (0,2,2)^\mathsf{T}, & (1,1,0)^\mathsf{T}, \\ (1,0,2)^\mathsf{T}, & (2,2,0)^\mathsf{T}, & (0,1,1)^\mathsf{T} \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{Z}_3^3$$

Označme řádkový prostor a sloupcový prostor $\boldsymbol{A}$ symboly $R_{\boldsymbol{A}}$ a $S_{\boldsymbol{A}}$.

Vlastnosti

Formálně: Sloupcový prostor je $S_{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{u} \in T^m : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \in T^n\}$, řádkový prostor je $R_{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{v} \in T^n : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d} \in T^m\}$.

Pozorování: Jádro $\ker \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in T^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ je podprostor T^n.

Pozorování: Elementární úpravy nemění jádro ani řádkový prostor.

Pozorování: Každé $\boldsymbol{v} \in R_{\boldsymbol{A}}$ a každé $\boldsymbol{x} \in \ker \boldsymbol{A}$ splňují: $\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = 0$.

Důkaz: Zvolíme vhodné $\boldsymbol{d} \in T^m$, aby $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{d}$. Potom platí: $\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{d})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{0} = 0$.

Věta: Pro každou $\boldsymbol{A} \in T^{m\times n}$ platí: $\dim(\ker \boldsymbol{A}) + \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.

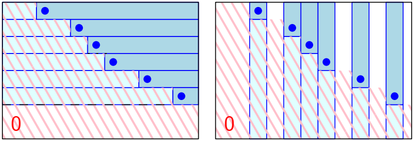
Důkaz: Nechť $d = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ je počet volných proměnných a $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ jsou řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ daná zpětnou substitucí.

Tato $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ jsou lineárně nezávislá, protože každé $\boldsymbol{x}_i$ má jako jediné složku odpovídající i-té volné proměnné nenulovou.

Vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ tvoří bázi $\ker \boldsymbol{A}$, a $\dim(\ker \boldsymbol{A}) = d = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

Dimenze řádkového a sloupcového prostoru se shodují

Pozorování: Pro každou $\boldsymbol{A}'$ v odstupňovaném tvaru platí: $\dim R_{\boldsymbol{A}'} = \dim S_{\boldsymbol{A}'} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}'$



Lemma: Jsou-li $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$, kde $\boldsymbol{A}'$ je v odstupňovaném tvaru, potom sloupce $\boldsymbol{A}$ odpovídající bázickým proměnným tvoří bázi $S_{\boldsymbol{A}}$.

Důkaz: Označme $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$, indexy bázických proměnných $j(1), \ldots, j(r)$ a příslušné sloupce matice $\boldsymbol{A}$ pomocí $\boldsymbol{c}_{j(1)}, \ldots, \boldsymbol{c}_{j(r)}$.

Pro každé $\boldsymbol{b} \in S_{\boldsymbol{A}}$ má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$, v němž všechny volné proměnné mají hodnotu 0.

Ze vztahu $\boldsymbol{b} = \sum_{i=0}^{r} x_{j(i)} \boldsymbol{c}_{j(i)}$ plyne, že $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{c}_{j(1)}, \ldots, \boldsymbol{c}_{j(r)}\}) = S_{\boldsymbol{A}}$.

Z jednoznačnosti $\boldsymbol{x}$ plyne, že $\{\boldsymbol{c}_{j(1)}, \ldots, \boldsymbol{c}_{j(r)}\}$ je lineárně nezávislá.

Věta: Každá $\boldsymbol{A}$ splňuje: $\dim R_{\boldsymbol{A}} = \dim S_{\boldsymbol{A}}$, čili $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$.

Souvislost s maticovým součinem

Pozorování: Pro sloupcové prostory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{AB}$ platí: $S_{\boldsymbol{AB}} \subseteq S_{\boldsymbol{A}}$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{A} \in T^{m \times n}$ a $\boldsymbol{B} \in T^{n \times p}$ vyplývá přímo z definice:
$\{\boldsymbol{u} \in T^m \colon \boldsymbol{u} = \boldsymbol{ABc}, \boldsymbol{c} \in T^p\} \subseteq \{\boldsymbol{v} \in T^m \colon \boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ad}, \boldsymbol{d} \in T^n\}$.

Pozorování: Pro řádkové prostory platí analogicky: $R_{\boldsymbol{AB}} \subseteq R_{\boldsymbol{B}}$.

Důsledek: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$

Pozor! Sloupcové prostory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{BA}$ splňují jen: $\dim S_{\boldsymbol{BA}} \leq \dim S_{\boldsymbol{A}}$.

Ukázka: Pro součin $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

platí: $\dim S_{\boldsymbol{BA}} = 1 \leq 2 = \dim S_{\boldsymbol{A}}$. Matice $\boldsymbol{B}$ je záměrně zvolena singulární, aby dimenze $S_{\boldsymbol{BA}}$ klesla oproti dimenzi $S_{\boldsymbol{A}}$.

Věta: Pro libovolnou matici $\boldsymbol{A} \in T^{m \times n}$, regulární $\boldsymbol{R} \in T^{m \times m}$ a regulární $\boldsymbol{R}' \in T^{n \times n}$ platí: $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{RA}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AR}')$.

Důkaz: $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{RA}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{RA}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$; pro $\boldsymbol{R}'$ též.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Má-li matice $\boldsymbol{A}$ jen tři řádky a ty jsou různé, potom $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T)$ může nabývat hodnoty
   a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) 4, f) 100.
2. Je-li součin $\boldsymbol{BA}$ definován, pak vždy
   a) prostor $S_{\boldsymbol{BA}}$ se shoduje s prostorem $S_{\boldsymbol{A}}$,
   b) $S_{\boldsymbol{BA}}$ je podprostorem $S_{\boldsymbol{A}}$,
   c) $S_{\boldsymbol{BA}}$ nemusí být podprostorem $S_{\boldsymbol{A}}$, ale oba jsou podprostorem společného aritmetického prostoru,
   d) $S_{\boldsymbol{BA}}$ a $S_{\boldsymbol{A}}$ nemusejí být podprostorem téhož prostoru.
3. Soustavy rovnic s maticemi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^T$ mají stejný počet:
   a) bázických proměnných, b) volných proměnných,
   c) volných v $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je stejně jako bázických v $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$.
4. Pokud $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, kde $\boldsymbol{C}$ je regulární, potom:
   a) $R_{\boldsymbol{A}} = R_{\boldsymbol{B}}$, b) $S_{\boldsymbol{A}} = S_{\boldsymbol{B}}$, c) $\ker(\boldsymbol{A}) = \ker(\boldsymbol{B})$,
   d) ani jedna z uvedených rovností neplatí.

Komentář k řešení kvízu

1. Matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje alespoň jeden nenulový řádek, a proto má hodnost alespoň 1 a nejvýše 3. Transpozice hodnost nezmění.
2. Pokud $\boldsymbol{A} \in T^{m \times n}$ a $\boldsymbol{B} \in T^{p \times m}$, pak $\boldsymbol{BA} \in T^{p \times n}$. Matice mohou mít různě dlouhé sloupce: $S_{\boldsymbol{A}} \subseteq T^m$ a $S_{\boldsymbol{BA}} \subseteq T^p$.
3. Matice mají shodnou hodnost a ta odpovídá počtu bázických proměnných. Je-li $\boldsymbol{A} \in T^{m \times n}$ ryze obdélníková, pak se počty volných proměnných liší: $n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \neq m - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$. Poslední možnost neplatí např. pro jednotkovou matici.
4. Součiny s regulární maticí zprava odpovídají sloupcovým úpravám a zachovávají sloupcový prostor a nikoli řádkový. Ani jádro není zachováno, např.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak byste popsali vektory ze sloupcového prostoru matice v odstupňovaném tvaru?
- Změní se tento prostor, pokud je matice v redukovaném odstupňovaném tvaru?
- Jsou-li $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ matice se stejným počtem sloupců, jak z nich lze sestavit matici s jádrem $\ker(\boldsymbol{A}) \cap \ker(\boldsymbol{B})$?
- Může pro správně zvolené matice platit $\operatorname{rank}(\boldsymbol{BA}) < \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}$? Pokud ano, dokážete nějaké takové sestavit?