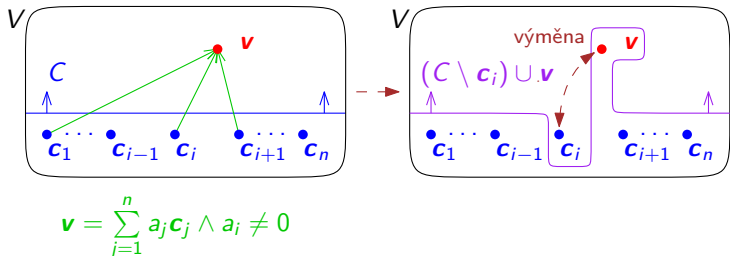


Lemma o výměně

Lemma: Necht' C generuje vektorový prostor V nad T , $c \in C$ a $v \in V$. Pokud lze v zapsat lineární kombinací vektorů z C , v níž je u c nenulový koeficient, tak množina $(C \setminus c) \cup v$ generuje V .

Formálně: $\left(v = \sum_{j=1}^n a_j c_j \wedge a_i \neq 0\right) \Rightarrow \text{span}((C \setminus c_i) \cup v) = V$



Roli c ze znění lemmatu má c_i z formálního zápisu i z obrázku.

Ukázka: Provedení elementární řádkové operace odpovídá výměně dle lemmatu v tzv. *řádkovém prostoru*, generovaném řádky matice. (Formálně jejich transpozicemi, protože vektory jsou sloupcové.)

Lemma o výměně

Lemma: Necht' C generuje vektorový prostor V nad T , $c \in C$ a $v \in V$. Pokud lze v zapsat lineární kombinací vektorů z C , v níž je u c nenulový koeficient, tak množina $(C \setminus c) \cup v$ generuje V .

Ukázka: Pro prostor $V = \mathbb{R}^3$, systém generátorů

$$C = \{c_1, \dots, c_4\} = \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T\}$$

a vektory $v = (1, 1, 1)^T$, $v' = (2, 1, 0)^T$.

Pokud vyjádříme: $(1, 1, 1)^T = (1, 0, 0)^T + (0, 1, 0)^T + (0, 0, 1)^T$, vidíme, že v lze vyměnit za kterýkoli z c_1 , c_2 nebo c_3 .

Podobně, pokud vyjádříme: $(1, 1, 1)^T = (1, 1, 0)^T + (0, 0, 1)^T$, vidíme, že v lze také vyměnit za c_4 .

Každá kombinace $a_1 c_1 + \dots + a_4 c_4 = (a_1 + a_4, a_2 + a_4, a_3)^T$ má třetí složku nulovou, právě když $a_3 = 0$.

Tudíž v' nelze vyjádřit jako lineární kombinaci, kde a_3 je nenulové. Proto c_3 nelze vyměnit za v' a získat opět systém generátorů.

Lemma o výměně

Lemma: Necht' C generuje vektorový prostor V nad T , $c \in C$ a $v \in V$. Pokud lze v zapsat lineární kombinací vektorů z C , v níž je u c nenulový koeficient, tak množina $(C \setminus c) \cup v$ generuje V .

Formálně: $\left(v = \sum_{j=1}^n a_j c_j \wedge a_i \neq 0\right) \Rightarrow \text{span}((C \setminus c_i) \cup v) = V$

Důkaz: $v = a_1 c_1 + \dots + a_i c_i + \dots + a_n c_n \Rightarrow c_i = \frac{1}{a_i} \left(v - \sum_{j \neq i} a_j c_j\right)$.

Jakékoli $u \in V$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci prvků z C . Vyskytuje-li se c_i v této kombinaci, dosadíme za c_i výraz výše. Tím získáme u jako lineární kombinaci prvků z $(C \setminus c_i) \cup v$.

V konečném případě, je-li $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ a $u = \sum_{j=1}^n b_j c_j$,

dostaneme jmenovitě $u = \frac{b_i}{a_i} v + \sum_{j \neq i} \left(b_j - \frac{a_j b_i}{a_i}\right) c_j$

Steinitzova věta o výměně

Věta: Nechť B je konečná lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V a C generuje V . Pak existuje D taková, že:

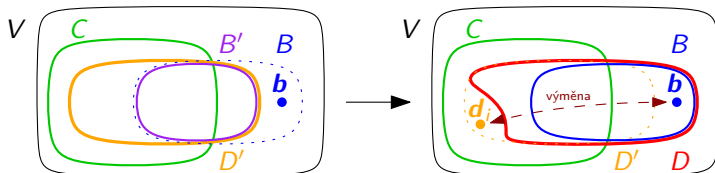
$$\blacktriangleright \text{span}(D) = V \quad \blacktriangleright B \subseteq D \quad \blacktriangleright |D| = |C| \quad \blacktriangleright D \setminus B \subseteq C$$

Důkaz: Indukcí podle $|B \setminus C|$. Když $B \setminus C = \emptyset$, lze vzít $D = C$.

Jinak zvolíme libovolné $b \in B \setminus C$ a položíme $B' = B \setminus b$.

Protože množina B' je lineárně nezávislá a $|B' \setminus C| < |B \setminus C|$, podle indukčního předpokladu existuje D' pro B' a C taková, že:

$$\blacktriangleright \text{span}(D') = V \quad \blacktriangleright B' \subseteq D' \quad \blacktriangleright |D'| = |C| \quad \blacktriangleright D' \setminus B' \subseteq C$$



Vyjádříme b vůči $\{d_1, \dots, d_n\} \subseteq D'$. Množina B je lineárně nezávislá, a tak $a_i \neq 0$ pro nějaké $d_i \notin B$. Potom $D = (D' \setminus d_i) \cup b$ splňuje všechny čtyři vlastnosti (první z nich z lematu o výměně).

Ukázka pro $V = \mathbb{Z}_2^4$

Důkaz indukcí lze převést do iterativního postupu tak, že vektory $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} = B \setminus C$ postupně vyměňujeme za vhodné vektory z C , čímž získáme posloupnost $D_0 = C, D_1, \dots, D_k = D$.

Je dána lineárně nezávislá množina $B = \{(1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 0, 1)^T\}$ a systém generátorů $C = D_0 =$

$\{(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$.

1. Vyjádříme např.: $(1, 1, 0, 0)^T = (1, 0, 0, 0)^T + (0, 1, 0, 0)^T$
a vyměníme $(1, 0, 0, 0)^T$ za $(1, 1, 0, 0)^T$.

Máme $D_1 =$

$\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$.

2. Vyjádříme např.: $(1, 1, 0, 1)^T = (1, 1, 0, 0)^T + (0, 0, 0, 1)^T$
a vyměníme $(0, 0, 0, 1)^T$ za $(1, 1, 0, 1)^T$.

Získali jsme požadovanou množinu generátorů $D_2 = D =$
 $\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$.

Druhý krok odpovídá důkazu pro $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)^T$ a $D' = D_1$.

Důsledky věty o výměně

Věta: Nechť B je konečná lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V a C generuje V . Pak existuje D t.ž.:

► $\text{span}(D) = V$ ► $B \subseteq D$ ► $|D| = |C|$ ► $D \setminus B \subseteq C$

Důsledek: Je-li vektorový prostor konečně generován, pak jakoukoli lineárně nezávislou množinu lze rozšířit na bázi.

Důkaz: Stačí D zúžit na lineárně nezávislou při zachování B .

Důsledek: Pokud je vektorový prostor konečně generován, pak všechny jeho báze mají stejnou mohutnost.

Důkaz: Mějme báze B, C prostoru V , pak:

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ nezávislá, } C \text{ generuje } V \Rightarrow |B| \leq |C| \\ C \text{ nezávislá, } B \text{ generuje } V \Rightarrow |C| \leq |B| \end{array} \right\} \Rightarrow |B| = |C|$$

Dimenze a věta o průniku a spojení

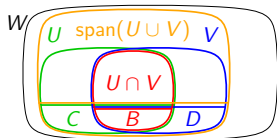
Definice: *Dimenze* konečně generovaného vektorového prostoru V je mohutnost kterékoli z jeho bází. Značí se $\dim(V)$.

Ukázky:

- ▶ $\dim(T^n) = n$.
- ▶ Dimenze roviny coby podprostoru $\mathbb{R}^3$ je 2.
- ▶ Dimenze prostoru polynomů stupně nejvýše n je $n + 1$.

Pozorování: Je-li V podprostorem W konečné dimenze, pak $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Důkaz: Báze podprostoru V je nezávislá ve W a lze ji rozšířit na bázi prostoru W .



Věta: Jsou-li U, V podprostory konečně generovaného prostoru W , pak $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(\text{span}(U \cup V))$

Důkaz: Rozšíříme bázi B průniku $U \cap V$ na bázi C prostoru U a také na bázi D prostoru V . Potom $|C| + |D| = |B| + |C \cup D|$.

Lineární nezávislost $B \cup C \cup D$: kdyby $\mathbf{v} \in \text{span}(B \cup C) \cap \text{span}(D)$, pak $\mathbf{v} \in U \cap V \Rightarrow [\mathbf{v}]_D = \mathbf{0}_{|D|} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathbf{v}]_{B \cup C} = \mathbf{0}_{|B \cup C|}$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pokud v prostoru $\mathbb{R}^3$ vyměníme ve dvouprvkové lineárně nezávislé množině jeden vektor za dva jiné lineárně nezávislé vektory, pak dostaneme: a) lineárně nezávislou množinu, b) bázi, c) množinu, která může, ale nemusí být bází, d) lineárně závislou množinu, e) systém generátorů $\mathbb{R}^3$.
2. Dimenze prostoru polynomů p stupně nejvýše 3 s koeficienty v $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(0) = 0$ je
a) 3 b) 4 c) 5 d) 15 e) 20 f) ∞
3. Kolik vektorů obsahuje prostor nad $\mathbb{Z}_p$ dimenze $d > 1$?
a) d b) $d + p$ c) dp d) d^p e) p^d f) 2^{d+p} g) 2^{dp}
4. Pravda nebo lež: Je-li V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak platí $\dim(\text{span}(W \setminus V)) = \dim W - \dim V$.

Komentář k řešení kvízu

1. Např. pokud v $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ vyměníme $(0, 1, 1)^T$ za $\{(0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$, tak získáme standardní bázi. Vyměníme-li jej za $\{(0, 1, 0)^T, (1, 1, 0)^T\}$, pak o bázi nejde.
2. Podmínka $p(0) = 0$ vymezuje jen polynomy bez konstantních členů $\{ax^3 + bx^2 + cx : a, b, c \in \mathbb{Z}_5\}$, např. s bází (x^3, x^2, x) .
3. Vektory jsou d -tice prvků ze $\mathbb{Z}_p$. Každou jejich složku lze volit z p možností, a to nezávisle na ostatních složkách.
4. Je-li $W = \mathbb{R}^2$ a V je přímka procházející počátkem, pak $\dim(\text{span}(W \setminus V)) = 2 \neq 2 - 1 = \dim(W) - \dim(V)$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Jaké kvantifikátory a které proměnné jsou pro stručnost vynechány z formálního zápisu lemmatu o výměně?
- ▶ Která z požadovaných vlastností množiny D z věty o výměně by byla porušena, kdybychom provedli stejný postup, ale nepožadovali, aby B byla lineárně nezávislá?
- ▶ Je konečnost využita v lemmatu o výměně?
- ▶ Ve kterém okamžiku selže důkaz Steinitzovy věty o výměně, pokud by B nebyla konečná?
- ▶ Je pro jednoznačnost dimenze třeba Steinitzova věta o výměně, nebo plyne i z jiných argumentů?
- ▶ Analogie (podle principu inkluze a exkluze) věty o průniku a spojení neplatí pro tři prostory. Dokážete najít protipříklad a podle něj určit vlastnost, kterou nelze pro důkaz zaručit?