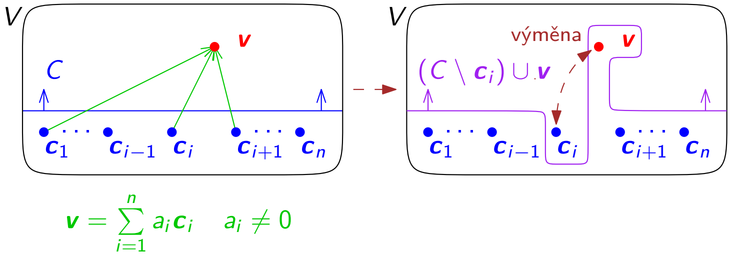
Lemma o výměně

Lemma: Nechť C generuje vektorový prostor V nad T. Jestliže pro vektor $\boldsymbol{v} \in V$ existují $\boldsymbol{c}_1 \dots, \boldsymbol{c}_n \in C$ a $a_1, \dots, a_n \in T$ taková, že $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{c}_i$, kde $a_i \neq 0$ pro nějaké i, pak $\mathrm{span}((C \setminus \boldsymbol{c}_i) \cup \boldsymbol{v}) = V$.



Lemma o výměně

Lemma: Nechť C generuje vektorový prostor V nad T. Jestliže pro vektor $\boldsymbol{v} \in V$ existují $\boldsymbol{c}_1 \dots, \boldsymbol{c}_n \in C$ a $a_1, \dots, a_n \in T$ taková, že $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{c}_i$, kde $a_i \neq 0$ pro nějaké i, pak $\mathrm{span}((C \setminus \boldsymbol{c}_i) \cup \boldsymbol{v}) = V$.

Ukázka: Pro prostor $V = \mathbb{R}^3$, systém generátorů

$$C = \{\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_4\} = \{(1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0)^\mathsf{T}, (0,0,1)^\mathsf{T}, (1,1,0)^\mathsf{T}\}$$

a vektory $\boldsymbol{v} = (1,1,1)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{v}' = (2,1,0)^\mathsf{T}$.

Pokud vyjádříme: $(1,1,1)^\mathsf{T} = (1,0,0)^\mathsf{T} + (0,1,0)^\mathsf{T} + (0,0,1)^\mathsf{T}$, vidíme, že $\boldsymbol{v}$ lze vyměnit za kterýkoli z $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ nebo $\boldsymbol{c}_3$.

Podobně, pokud vyjádříme: $(1,1,1)^\mathsf{T} = (1,1,0)^\mathsf{T} + (0,0,1)^\mathsf{T}$, vidíme, že $\boldsymbol{v}$ lze také vyměnit za $\boldsymbol{c}_4$.

Každá kombinace $a_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_4\boldsymbol{c}_4 = (a_1 + a_4, a_2 + a_4, a_3)^\mathsf{T}$ má třetí složku nulovou, právě když $a_3 = 0$.

Tudíž $\boldsymbol{v}'$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci, kde a_3 je nenulové. Proto $\boldsymbol{c}_3$ nelze vyměnit za $\boldsymbol{v}'$ a získat opět systém generátorů.

Lemma o výměně

Lemma: Nechť C generuje vektorový prostor V nad T. Jestliže pro vektor $\boldsymbol{v} \in V$ existují $\boldsymbol{c}_1 \ldots, \boldsymbol{c}_n \in C$ a $a_1, \ldots, a_n \in T$ taková, že $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{c}_i$, kde $a_i \neq 0$ pro nějaké i, pak $\mathrm{span}((C \setminus \boldsymbol{c}_i) \cup \boldsymbol{v}) = V$.

Důkaz: $\boldsymbol{v} = a_1 \boldsymbol{c}_1 + \cdots + a_i \boldsymbol{c}_i + \cdots + a_n \boldsymbol{c}_n \Rightarrow \boldsymbol{c}_i = \frac{1}{a_i}\Big(\boldsymbol{v} - \sum_{j \neq i} a_j \boldsymbol{c}_j\Big)$.
Jakékoli $\boldsymbol{u} \in V$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci prvků z C. Vyskytuje-li se $\boldsymbol{c}_i$ v této kombinaci, dosadíme za $\boldsymbol{c}_i$ výraz výše. Tím získáme $\boldsymbol{u}$ jako lineární kombinaci prvků z $(C \setminus \boldsymbol{c}_i) \cup \boldsymbol{v}$.

V konečném případě, je-li $C = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ a $\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{c}_j$,

dostaneme jmenovitě $\boldsymbol{u} = \frac{b_i}{a_i}\boldsymbol{v} + \sum_{j \neq i}\Big(b_j - \frac{a_j b_i}{a_i}\Big)\boldsymbol{c}_j$

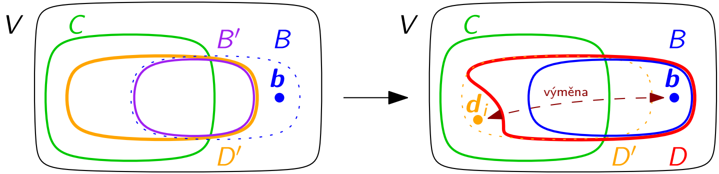
Steinitzova věta o výměně

Věta: Nechť B je konečná lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V a C generuje V. Pak existuje D taková, že:

- $\mathrm{span}(D) = V$
- $B \subseteq D$
- $|D| = |C|$
- $D \setminus B \subseteq C$

Důkaz: Indukcí podle $|B \setminus C|$. Je-li $B \setminus C = \emptyset$, poté $D = C$.
Jinak zvolíme libovolné $\boldsymbol{b} \in B \setminus C$ a položíme $B' = B \setminus \boldsymbol{b}$.
Protože množina B' je lineárně nezávislá a $|B' \setminus C| < |B \setminus C|$, podle indukčního předpokladu existuje D' pro B' a C taková, že:

- $\mathrm{span}(D') = V$
- $B' \subseteq D'$
- $|D'| = |C|$
- $D' \setminus B' \subseteq C$



Použijeme lemma o výměně pro $\boldsymbol{b}$ a $D' = \{\boldsymbol{d}_1 \dots, \boldsymbol{d}_n\}$.
Protože B je lineárně nezávislá, je $a_i \neq 0$ pro nějaké $\boldsymbol{d}_i \in D' \setminus B$.
Potom $D = (D' \setminus \boldsymbol{d}_i) \cup \boldsymbol{b}$ splňuje všechny čtyři vlastnosti.

Ukázka pro $V = \mathbb{Z}_2^4$

Důkaz indukcí lze převést do iterativního postupu tak, že vektory $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\} = B \setminus C$ postupně vyměňujeme za vhodné vektory z C, čímž získáme posloupnost $D_0 = C, D_1, \ldots, D_k = D$.

Je dána lineárně nezávislá množina $B = \{(1,1,0,0)^\mathsf{T}, (1,1,0,1)^\mathsf{T}\}$ a systém generátorů $C = D_0 =$
$\{(1,0,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0,0)^\mathsf{T}, (0,0,1,0)^\mathsf{T}, (0,0,0,1)^\mathsf{T}, (1,1,1,1)^\mathsf{T}\}$.

1. Vyjádříme např.: $(1,1,0,0)^\mathsf{T} = (1,0,0,0)^\mathsf{T} + (0,1,0,0)^\mathsf{T}$
a vyměňíme $(1,0,0,0)^\mathsf{T}$ za $(1,1,0,0)^\mathsf{T}$.

Máme $D_1 =$
$\{(1,1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0,0)^\mathsf{T}, (0,0,1,0)^\mathsf{T}, (0,0,0,1)^\mathsf{T}, (1,1,1,1)^\mathsf{T}\}$.

2. Vyjádříme např.: $(1,1,0,1)^\mathsf{T} = (1,1,0,0)^\mathsf{T} + (0,0,0,1)^\mathsf{T}$
a vyměňíme $(0,0,0,1)^\mathsf{T}$ za $(1,1,0,1)^\mathsf{T}$.

Získali jsme požadovanou množinu generátorů $D_2 = D =$
$\{(1,1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0,0)^\mathsf{T}, (0,0,1,0)^\mathsf{T}, (1,1,0,1)^\mathsf{T}, (1,1,1,1)^\mathsf{T}\}$.

Druhý krok odpovídá důkazu pro $\boldsymbol{b} = (1,1,0,1)^\mathsf{T}$ a $D' = D_1$.

Důsledky věty o výměně

Věta: Nechť B je konečná lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V a C generuje V. Pak existuje D t.ž.:

- $\mathrm{span}(D) = V$
- $B \subseteq D$
- $|D| = |C|$
- $D \setminus B \subseteq C$

Důsledek: Je-li vektorový prostor konečně generován, pak jakoukoli lineárně nezávislou množinu lze rozšířit na bázi.

Důkaz: Stačí D zúžit na lineárně nezávislou při zachování B.

Důsledek: Pokud je vektorový prostor konečně generován, pak všechny jeho báze mají stejnou mohutnost.

Důkaz: Mějme báze B, C prostoru V, pak:

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ nezávislá, } C \text{ generuje } V \Rightarrow |B| \leq |C| \\ C \text{ nezávislá, } B \text{ generuje } V \Rightarrow |C| \leq |B| \end{array}\right\} \Rightarrow |B| = |C|$$

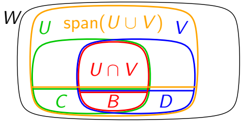
Dimenze

Definice: *Dimenze* konečně generovaného vektorového prostoru V je mohutnost kterékoli z jeho bází. Značí se $\dim(V)$.

Ukázky:

- $\dim(T^n) = n$
- Dimenze řádkového prostoru matice $\boldsymbol{A}$ je rovna $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$
- Dimenze prostoru polynomů stupně nejvýše n je $n+1$.

Pozorování: Je-li V podprostorem konečně generovaného prostoru W, pak $\dim(V) \leq \dim(W)$.



Důkaz: Báze podprostoru V je nezávislá ve W a lze ji rozšířit na bázi prostoru W.

Věta: Jsou-li U, V podprostory konečně generovaného prostoru W, pak $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(\operatorname{span}(U \cup V))$

Důkaz: Rozšíříme bázi B průniku $U \cap V$ na bázi C prostoru U a také na bázi D prostoru V. Potom $|C| + |D| = |B| + |C \cup D|$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pokud v prostoru $\mathbb{R}^3$ vyměníme ve dvouprvkové lineárně nezávislé množině jeden vektor za dva jiné lineárně nezávislé vektory, pak dostaneme: a) lineárně nezávislou množinu, b) bázi, c) množinu, která může, ale nemusí být bazí, d) lineárně závislou množinu, e) systém generátorů $\mathbb{R}^3$.
2. Dimenze prostoru polynomů p stupně nejvýše 3 s koeficienty v $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(0) = 0$ je
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 15 e) 20 f) ∞
3. Kolik vektorů obsahuje prostor nad $\mathbb{Z}_p$ dimenze $d > 1$?
   a) d b) $d + p$ c) dp d) d^p e) p^d f) 2^{d+p} g) 2^{dp}
4. Pravda nebo lež: Je-li V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak platí $\dim(\mathrm{span}(W \setminus V)) = \dim W - \dim V$.

Komentář k řešení kvízu

1. Např. pokud v $\{(1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,1)^\mathsf{T}\}$ vyměníme $(0,1,1)^\mathsf{T}$ za $\{(0,1,0)^\mathsf{T}, (0,0,1)^\mathsf{T}\}$, tak získáme standardní bázi. Vyměníme-li jej za $\{(0,1,0)^\mathsf{T}, (1,1,0)^\mathsf{T}\}$, pak o bázi nejde.
2. Podmínka $p(0) = 0$ vymezuje jen polynomy bez konstantních členů $\{ax^3 + bx^2 + cx \colon a, b, c \in \mathbb{Z}_5\}$, např. s bází (x^3, x^2, x).
3. Vektory jsou d-tice prvků ze $\mathbb{Z}_p$. Každou jejich složku lze volit z p možností, a to nezávisle na ostatních složkách.
4. Je-li $W = \mathbb{R}^2$ a V je přímka procházející počátkem, pak $\dim(\operatorname{span}(W \setminus V)) = 2 \neq 2 - 1 = \dim(W) - \dim(V)$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Která z požadovaných vlastností množiny D z věty o výměně by byla porušena, kdybychom provedli stejný postup, ale nepožadovali, aby B byla lineárně nezávislá?
- Je konečnost využita v lemmatu o výměně?
- Ve kterém okamžiku selže důkaz Steinitzovy věty o výměně, pokud by B nebyla konečná?
- Jak spolu souvisejí dimenze řádkového prostoru a jádra?
- Je pro jednoznačnost dimenze třeba Steinitzova věta o výměně nebo plyne i z jiných argumentů?