# Lineární nezávislost

Definice: Množina vektorů $B$ je *lineárně nezávislá*, právě když pro každou $n$-tici vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in B$ platí, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení $a_1 = \cdots = a_n = 0$. V ostatních případech je množina $B$ *lineárně závislá*.

Pozorování: Pokud jsou $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně závislé, pak $\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$, kde nějaké $a_i \neq 0$ . Lze tedy vyjádřit odpovídající $\boldsymbol{v}_i$ jako lineární kombinaci zbývajících vektorů: $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{a_j}{a_i} \boldsymbol{v}_j$.

# Ukázky

- Když $\mathbf{0} \in B$, pak $B$ je lineárně závislá.
  ... $\mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ je netriviální lineární kombinace.
- Řádky nebo sloupce $\mathbf{I}_n$ jsou lineárně nezávislé.
- Řádky matice v odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé.
  ... pivot nelze eliminovat nulami ve zbytku sloupce pod ním.
- V $\mathbb{R}^2$: $B = \{\boldsymbol{b}\}$ je lineárně nezávislá, právě když $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$.
  Množina $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ je lineárně nezávislá, právě když $\boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{c}_2$ a přímka určená $\boldsymbol{c}_1$ a $\boldsymbol{c}_2$ neobsahuje počátek.
  Jakákoli $D$ s alespoň třemi body je lineárně závislá.
- Ve vektorovém prostoru reálných polynomů,
  je nekonečná množina $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ lineárně nezávislá.
- Prázdná množina je lineárně nezávislá.

# Dva odlišné testy lineární nezávislosti v $T^n$

Je $B = \{(2,1,0,3)^\mathsf{T}, (4,3,1,4)^\mathsf{T}, (0,2,2,1)^\mathsf{T}, (3,4,1,0)^\mathsf{T}, (0,2,2,2)^\mathsf{T}\}$ lineárně závislá nebo nezávislá množina v $\mathbb{Z}_5^4$?

a) Pomocí Gaussovy eliminace, protože elementární operace jen vytvářejí nové *lineární kombinace* původních řádků:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získali jsme nulový řádek. Jinými slovy, nulový vektor lze zapsat jako netriviální lineární kombinaci vektorů z $B$, a proto je $B$ lineárně závislá.

b) Nalezením netriviálního řešení rovnice $a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$.

Rovnice odpovídá homogenní soustavě s maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice *obsahuje alespoň jednu volnou proměnnou*: $a_3$.
Soustava a i rovnice mají netriviální řešení, např. $(4,3,1,0,0)^\mathsf{T}$ dává $4(2,1,0,3)^\mathsf{T} + 3(4,3,1,4)^\mathsf{T} + (0,2,2,1)^\mathsf{T} = \mathbf{0}$, čímž je $B$ lineárně závislá.

# Vlastnosti lineárně (ne)závislých množin

Pozorování: Je-li $B$ nezávislá a $C \subseteq B$, pak je $C$ je nezávislá.

Pozorování: Je-li $C$ závislá a $C \subseteq B$, pak je $B$ závislá.

Pozorování: $B$ je nezávislá, právě když $\forall \boldsymbol{b} \in B : \boldsymbol{b} \notin \operatorname{span}(B \setminus \boldsymbol{b})$.

Důkaz: $\boldsymbol{b} \in \operatorname{span}(B \setminus \boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i$, kde $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in B \setminus \boldsymbol{b}$.

Tvrzení: Jestliže $C$ je konečná generující množina prostoru $V$ a $B$ je lineárně nezávislá ve $V$, potom $|B| \leq |C|$.

Důkaz: Předpokládejme, že $C = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ a pro spor, že z $B$ lze vybrat různá $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n+1}$. Každé $\boldsymbol{b}_i$ vyjádříme jako $\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{c}_j$.
Odpovídající matice $\boldsymbol{A}$ má $n+1$ řádků a $n$ sloupců,
proto je některý řádek lineární kombinací ostatních.
Tato kombinace také potvrzuje lineární závislost $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n+1}$.

Formálně: $\exists \boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{n+1})^\mathsf{T} \in T^{n+1} \setminus \mathbf{0}$: $\boldsymbol{d}^\mathsf{T} \boldsymbol{A} = \mathbf{0}^\mathsf{T} \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n+1} d_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{c}_j = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n+1} d_i a_{ij} \right) \boldsymbol{c}_j = \sum_{j=1}^{n} 0 \boldsymbol{c}_j = \mathbf{0}$$

# Různé způsoby popisu vektorového prostoru

Nechť $V = \{(0,0,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,2,1)^\mathsf{T}, (0,2,1,2)^\mathsf{T}, (1,0,1,0)^\mathsf{T},$
$(1,1,0,1)^\mathsf{T}, (1,2,2,2)^\mathsf{T}, (2,0,2,0)^\mathsf{T}, (2,1,1,1)^\mathsf{T}, (2,2,0,2)^\mathsf{T}, \}$
je prostorem aritmetických vektorů nad $\mathbb{Z}_3$.

*(Tyto vektory viděné jako 4-písmenová slova v 3-písmenné abecedě mají vlastnost, že jakákoli dvě slova se liší alespoň ve dvou symbolech. Podobné množiny lze použít k návrhu samoopravných kódů.)*

*Mohl by být $V$ popsán efektivněji než seznamem 9 hodnot?*

Můžeme si všimnout, že tyto vektory jsou závislé, např. $(0,0,0,0)^\mathsf{T}$; $(2,1,1,1)^\mathsf{T} = (2,0,2,0)^\mathsf{T} + (0,2,1,2)^\mathsf{T}$; $(2,0,2,0)^\mathsf{T} = 2 \cdot (1,0,1,0)^\mathsf{T}$.

Opakované odstraňování závislých vektorů vede k podmnožině, která je nezávislá, ale stále generuje celý $V$.

Konkrétně $V$ lze generovat pouze dvěma vektory, např. $(0,1,2,1)^\mathsf{T}$ a $(1,0,1,0)^\mathsf{T}$.

| | | |
|---|---|---|
| 0000 | 0121 | 0212 |
| 1010 | 1101 | 1222 |
| 2020 | 2111 | 2202 |

Každý vektor $V$ je také *unikátní* lineární kombinací těchto dvou!

# Báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru $V$ je
lineárně nezávislá množina $B$, která generuje prostor $V$.

Proč je pojem báze tak důležitý?

- $\mathrm{span}(B) = V$ znamená, že každý vektor $V$ je lineární kombinací vektorů báze $B$,
- $B$ je lineárně nezávislá, proto je výše uvedená lineární kombinace *unikátní* pro každý vektor $V$.

Důkaz: Pokud je $B$ lineárně nezávislá a $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} a'_i \boldsymbol{b}_i$, pak
$\mathbf{0} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i - \sum_{i=1}^{n} a'_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a'_i) \boldsymbol{b}_i \ \Rightarrow\ \forall i : a_i = a'_i$.

Definice: Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je *uspořádaná* báze vektorového prostoru $V$ nad $T$. *Vektor souřadnic* $\boldsymbol{v} \in V$ vzhledem k bázi $B$ je $[\boldsymbol{v}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}} \in T^n$, kde $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i$.

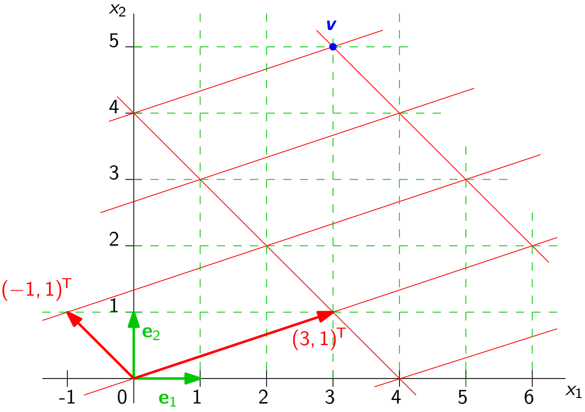
# Ukázky

- V aritmetickém vektorovém prostoru $T^n$ tvoří sloupce $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ tzv. *standardní bázi* E.
  Též se nazývá *přirozená* nebo *kanonická* báze.
- V $\mathbb{R}^2$ je množina $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ bází, právě když $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2$ a přímka určená $\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{b}_2$ neobsahuje počátek.
- Ve vektorovém prostoru reálných polynomů, je bází např. nekonečná množina polynomů $\{x^0, x^1, x^2, \ldots\}$.
- V prostoru polynomů stupně nejvýše 4, máme například:
  $[x^3 + 2x - 1]_{(x^0, x^1, \ldots, x^4)} = (-1, 2, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$, ale i
  $[x^3 + 2x - 1]_{(x^0+x^1, x^1-2x^2, x^2, x^3, x^4)} = (-1, 3, 6, 1, 0)^\mathsf{T}$, neboť
  $x^3 + 2x - 1 = -1(x^0 + x^1) + 3(x^1 - 2x^2) + 6x^2 + 1x^3$
- Ve vektorovém prostoru $V = \mathcal{P}(M)$ nad $\mathbb{Z}_2$ máme např. bázi z jednoprvkových množin: $[\{a, c\}]_{(\{a\}, \{b\}, \{c\})} = (1, 0, 1)^\mathsf{T}$.

# Souřadnice vektoru vzhledem k různým bázím

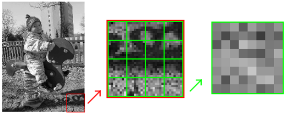
Souřadnice $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke standardní (uspořádané) bázi $\mathrm{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = ((1,0)^\mathsf{T}, (0,1)^\mathsf{T})$ jsou: $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]_\mathrm{E} = (3,5)^\mathsf{T}$.

Vzhledem k jiné uspořádané bázi $B = ((3,1)^\mathsf{T}, (-1,1)^\mathsf{T})$ má *stejný* vektor souřadnice: $[\boldsymbol{v}]_B = (2,3)^\mathsf{T}$.

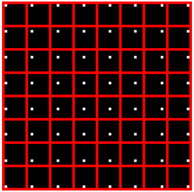


# Různé báze — Jpeg

Vektor $\boldsymbol{v}$ je výřez $8 \times 8$ pixelů z jedné barevné roviny a je normalizován na $(-128, 127)$:

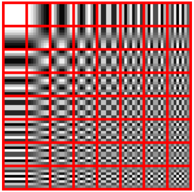


Standardní báze $\mathsf{E}$:



$$[\boldsymbol{v}]_{\mathsf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 30 & -35 & 29 & 1 & -10 & 20 \\ -6 & -54 & -15 & 0 & -18 & -69 & -10 & -32 \\ -38 & 18 & -36 & 58 & 37 & 18 & -7 & -4 \\ 17 & 38 & 27 & -19 & -26 & -43 & -2 & 44 \\ 26 & 33 & 44 & 48 & 42 & 7 & -8 & 20 \\ 11 & 30 & -2 & 32 & 70 & 25 & 25 & 17 \\ 22 & -44 & 30 & -19 & 14 & 48 & 55 & 6 \\ -11 & -16 & 8 & 6 & 22 & -28 & -10 & 17 \end{pmatrix}$$

Báze z harmonických funkcí $B$:



$$[\boldsymbol{v}]_{B} \doteq \begin{pmatrix} 11 & -59 & 16 & 4 & -14 & 4 & -9 & -10 \\ -6 & 110 & -8 & -30 & -30 & 46 & -19 & -13 \\ 16 & -84 & 23 & 5 & -20 & 6 & -12 & -14 \\ -20 & -83 & -29 & -2 & 18 & -4 & 16 & 27 \\ 2 & 91 & 3 & -1 & 29 & -14 & -13 & 21 \\ 27 & 21 & 38 & 41 & -52 & -2 & -40 & 22 \\ -20 & 40 & -28 & 41 & 16 & -46 & -12 & 27 \\ -9 & 59 & -13 & -46 & 11 & 15 & -58 & -39 \end{pmatrix}$$

Jde o $64$-složkové vektory, jen je zde znázorňujeme maticemi.

# Ztrátová komprese a dekomprese (zjednodušeno)

$$\begin{pmatrix} 11 & -59 & 16 & 4 & -14 & 4 & -9 & -10 \\ -6 & 110 & -8 & -30 & -30 & 46 & -19 & -13 \\ 16 & -84 & 23 & 5 & -20 & 6 & -12 & -14 \\ -20 & -83 & -29 & -2 & 18 & -4 & 16 & 27 \\ 2 & 91 & 3 & -1 & 29 & -14 & -13 & 21 \\ 27 & 21 & 38 & 41 & -52 & -2 & -40 & 22 \\ -20 & 40 & -28 & 41 & 16 & -46 & -12 & 27 \\ -9 & 59 & -13 & -46 & 11 & 15 & -58 & -39 \end{pmatrix}$$

vydělíme po složkách čísly

z tzv. *kvantizační matice*

$$\begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}$$

a zaokrouhlíme

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

přenásobíme kvantizační maticí

$$\begin{pmatrix} 48 & -11 & -20 & -16 & 24 & 0 & 0 & 61 \\ -60 & 24 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -56 & -26 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 56 \\ 70 & 0 & 0 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 44 & 37 & -56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & -35 & 55 & 0 & -81 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & -78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 0 & -95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

převedeme z báze $B$ do báze $\mathsf{E}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 39 & -16 & 23 & -13 & 23 & 0 \\ 1 & -53 & -40 & -38 & -3 & -61 & -36 & -14 \\ -41 & -15 & 32 & 47 & 55 & 20 & -2 & -24 \\ 15 & 33 & 12 & -38 & -71 & -36 & 12 & 43 \\ 31 & 27 & 48 & 82 & 56 & 5 & -11 & 18 \\ 22 & -1 & 6 & 23 & 53 & 35 & 25 & 13 \\ 1 & -5 & 7 & -33 & 25 & 38 & 62 & 21 \\ -2 & -29 & 17 & -3 & 34 & -38 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Data: jen 27 čísel z $\{-5, \ldots, 5\} \setminus 0$

Průměrná odchylka odstínu $< 6\%$

Originál:  Reprodukce: 

# Existence báze

Pozorování: Množina $B$ je bází vektorového prostoru $V$, právě když $\mathrm{span}(B) = V$ a $\forall \boldsymbol{b} \in B : \boldsymbol{b} \notin \mathrm{span}(B \setminus \boldsymbol{b})$.

Důsledek: Každá konečná generující množina $C$ vektorového prostoru $V$ obsahuje bázi $B$ jako podmnožinu.

Důkaz: Nejprve položíme $B = C$. Potom postupně testujeme každé $\boldsymbol{b} \in B$, zdali $\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}(B \setminus \boldsymbol{b})$. Pokud ano, odebereme $\boldsymbol{b}$ z $B$.

Věta: Každý vektorový prostor má bázi.

... pro konečně generované je už dokázáno;
pro nekonečně generované důkaz vynecháme.
(Tato část věty je ekvivalentní axiomu výběru.)

Pozorování: Každý podprostor $V$ aritmetického vektorového prostoru je množinou řešení vhodné homogenní soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Důkaz: Za řádky $\boldsymbol{B}$ zvolíme bázi $V$ a za řádky $\boldsymbol{A}$ pak bázi $\ker(\boldsymbol{B})$.
$\ker(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} = \{\boldsymbol{x} \colon \forall \boldsymbol{y} \in \ker(\boldsymbol{B}) \colon \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 0\} = R_{\boldsymbol{B}} = V$.

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež: Pro každou regulární matici $\boldsymbol{A}$ platí, že řádky $\boldsymbol{A}^{-1}$ jsou lineárně nezávislé.
2. Průnik dvou bází vektorového prostoru $V$
   a) je vždy prázdný
   b) je lineárně nezávislá množina
   c) generuje prostor $V$
   d) je bází prostoru $V$
   e) neplatí ani jedno z uvedených
3. Pravda nebo lež:
   Jsou-li $B$ a $C$ dvě báze prostoru $V$ a pro alespoň jeden vektor $\boldsymbol{v} \in V$ platí, že $[\boldsymbol{v}]_B = [\boldsymbol{v}]_C$, tak potom $B = C$.

# Komentář k řešení kvízu

1. Matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je také regulární a podle charakterizace regulárních matic nemůže mít lineárně závislé řádky.
2. Např. standardní báze prostoru $\mathbb{R}^2$ se s bází $((1,0)^\mathsf{T},(1,1)^\mathsf{T})$ protíná v pouze jednom vektoru. Tento negeneruje celé $\mathbb{R}^2$.
   Průnik (i prázdný) je lineárně nezávislý, protože je podmnožinou lineárně nezávislé množiny, např. báze $B$.
3. Např. z lineární nezávislosti báze vyplývá, že nulový vektor daného prostoru (ne nutně aritmetický) má vždy nulový vektor souřadnic (aritmetický) vůči libovolné bázi.
   Jiný protipříklad: stačí aby platilo $\boldsymbol{v} \in B \cap C$.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jakým způsobem lze vybrat co nejvíce lineárně nezávislých sloupců z matice v odstupňovaném tvaru?
- Jak byste otestovali, zdali je nějaká množina sudých podgrafů lineárně nezávislá?
- Platí jednoznačnost koeficientů lineární kombinace vůči lineárně nezávislé množině $B$ i v případě, že $B$ je nekonečná a kombinace jsou vyjádřeny vůči jiným podmnožinám $B$?
- Jak vypadá nějaká báze prostoru matic $T^{m \times n}$?