Operace s maticemi

Definice: Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ definujeme *nulovou matici* $\mathbf{0}_{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takovou, že splňuje $\forall i,j : (\mathbf{0}_{m,n})_{ij} = 0$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ je *jednotková matice* $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definována vztahy $(\mathbf{I}_n)_{ij} = 1$, právě když $i = j$; a jinak $(\mathbf{I}_n)_{ij} = 0$. Znač. též jen $\mathbf{0}$, $\mathbf{I}$.

Hlavní diagonálu čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ tvoří prvky a_{ii}.

Ukázka:

$$\mathbf{0}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: *Transponovaná* matice k matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ splňující $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})_{ij} = a_{ji}$.

Čtvercová $\boldsymbol{A}$ je *symetrická*, pokud $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$, tj. $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})_{ij} = a_{ji} = a_{ij}$.

Ukázka:
Transponovaná matice k $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ je $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ je symetrická, protože splňuje $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$.

Operace s maticemi

Definice:

Součet matic $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definovaná

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ukázka:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+0 & 3-2 \\ 4+1 & 5-5 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice:

Pro $t \in \mathbb{R}$ je t-*násobek* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice $(t\boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňující

$$(t\boldsymbol{A})_{ij} = ta_{ij}.$$

Ukázka:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Součin matic

Definice:

Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ je *součin* $(\boldsymbol{AB}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ definován

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Ukázka:

Pro $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dostaneme $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Mnemotechnicky:

$$\begin{array}{c|c} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 3 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 7 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & 1 & . \\ & & & & 0 & . \\ & & & & 2 & . \\ & & & & 0 & . \\ \hline . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 7 & . \end{array}$$

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 7$$

Součin matic

Definice:
Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ je *součin* $(\boldsymbol{AB}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ definován

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Pozorování: Maticový součin $\boldsymbol{AB}$ pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ vyžaduje mnp násobení a $m(n-1)p$ sčítání, čili celkem $mnp + m(n-1)p = 2mnp - mp \approx mnp$ aritmetických operací.

Symbol $\approx$ čteme „asymptoticky“ nebo „přibližně“ a ze součtu ponechá jen největší člen(y) bez multiplikativní konstanty.

Upozornění: U matic mají *násobek* a *součin* různý význam!

Maticový součin používáme v zápisu soustav $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde vektor $\boldsymbol{x}$ bereme jako matici s jedním sloupcem.

Dokažte nebo vyřešte sami

Tvrzení: Jsou-li výsledky operací definovány, pak:

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ $\quad$ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}$ $\quad$ $\exists!\boldsymbol{B}:\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$

$s(t\boldsymbol{A})=(st)\boldsymbol{A}$ $\quad$ $(s+t)\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ $\quad$ $(t\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}=t\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$

$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{A}$ $\quad$ Důkaz: $((A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}})_{ij}=(A^{\mathsf{T}})_{ji}=a_{ij}$

Najděte čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ takové, že $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

Ukažte, že matice $\boldsymbol{AA}^{\mathsf{T}}$ je symetrická pro libovolné $\boldsymbol{A}$.

Ukažte, že pro libovolné $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ platí, že $\mathbf{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\mathbf{I}_n=\boldsymbol{A}$.

Odvoďte následující pravidla pro součiny blokových matic.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$$

Tip: rozdělte sumu na dvě.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4\\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$$

Tvrzení: Jsou-li výsledky operací definovány, pak:

1. $(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$
2. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$
4. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

Důkaz:

1. $\boldsymbol{A}$ je typu $m \times n \Rightarrow \boldsymbol{B}$ je typu $n \times p$

$$((\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}})_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})_{ik} (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{kj} = (\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{ij}$$

2. $\boldsymbol{A}$ je typu $m \times n \Rightarrow \boldsymbol{B}$ je typu $n \times p \Rightarrow \boldsymbol{C}$ je typu $p \times q$

$$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (\boldsymbol{AB})_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (\boldsymbol{BC})_{lj} = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij}$$

Tvrzení: Jsou-li výsledky operací definovány, pak:

1. $(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$
2. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$
4. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

3. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$$((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik}) c_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} =$$
$$= (\boldsymbol{AC})_{ij} + (\boldsymbol{BC})_{ij} = (\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC})_{ij}$$

4. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} =$$
$$= (\boldsymbol{AB})_{ij} + (\boldsymbol{AC})_{ij} = (\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC})_{ij}$$

Ukázka k důkazu asociativity součinu

$$((\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (\boldsymbol{AB})_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} (\boldsymbol{BC})_{lj} = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}))_{ij}$$

$m = q = i = j = 1, \; n = p = 2:$

		0	1	6
		2	3	7
4	5	10	19	193

		6
		7
0	1	7
2	3	33
4	5	193

$$193 = 10 \cdot 6 + 19 \cdot 7 = (4 \cdot 0 + 5 \cdot 2) \cdot 6 + (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3) \cdot 7 =$$
$$(4{\cdot}0{\cdot}6 + 5{\cdot}2{\cdot}6) + (4{\cdot}1{\cdot}7 + 5{\cdot}3{\cdot}7) = (4{\cdot}0{\cdot}6 + 4{\cdot}1{\cdot}7) + (5{\cdot}2{\cdot}6 + 5{\cdot}3{\cdot}7) =$$
$$4 \cdot (0 \cdot 6 + 1 \cdot 7) + 5 \cdot (2 \cdot 6 + 3 \cdot 7) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 33 = 193$$

Efektivita výpočtu součinu

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times q} : (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{AB}$	$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{AB} \approx mnp$ aritmetických operací,
$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} \approx mpq$ operací,
celkem $\approx mp(n+q)$ operací.

	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{BC}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

$\boldsymbol{BC} \approx npq$ operací,
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \approx mnq$ operací,
celkem $\approx nq(m+p)$ operací.

Pro $m \ll n, p, q$, máme $mp(n+q) \ll nq(m+p)$.

					4
		2	−3	3	1
		−1	2	−1	−1
1	2	0	1	1	0
−2	−4	0	−2	−2	0

			4
			1
			−1
2	−3	3	2
−1	2	−1	−1
	1	2	0
	−2	−4	0

První způsob má *více* mezihodnot než druhý.

I když je konečný výsledek v obou směrech stejný, vhodné pořadí dílčích součinů může ovlivnit celkovou výpočetní náročnost.

Elementární matice

Pozorování: Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice získaná z $\boldsymbol{A}$ pomocí:

- vynásobení i-tého řádku $t \neq 0$. Potom $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EA}$, kde $e_{ii} = t$, $e_{kk} = 1$ pro $k \neq i$ a $e_{kl} = 0$ za $k \neq l$.
- přičtení j-tého řádku k i-tému. Potom $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EA}$, kde $e_{ij} = 1$, $e_{kk} = 1$, pro všechny k a $e_{kl} = 0$ pro $i \neq k \neq l \neq j$.

Tyto matice $\boldsymbol{E}$ se nazývají *elementární* matice.

Ukázka:

$$\begin{array}{cccc|l}
 & & & & \left[\begin{array}{cccc} 3 & 6 & \dots & a_{1k} \\ 7 & 1 & \dots & a_{2k} \\ 2 & 4 & \dots & a_{3k} \\ 5 & 3 & \dots & a_{4k} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ i = 2 \\ \\ j = 4 \end{array}
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 3 & 6 & \dots & a_{1k} \\ 28 & 4 & \dots & 4 \cdot a_{2k} \\ 2 & 4 & \dots & a_{3k} \\ 5 & 3 & \dots & a_{4k} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ t = 4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 3 & 6 & \dots & a_{1k} \\ 12 & 4 & \dots & a_{2k} + a_{4k} \\ 2 & 4 & \dots & a_{3k} \\ 5 & 3 & \dots & a_{4k} \end{array}\right]$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik artitmetických operací je třeba pro výpočet součinu matic typu 3×4 a 4×2? a) 18 součtů a 18 součinů, b) $24\times +$ a $18\times \cdot$, c) $18\times +$ a $24\times \cdot$, d) $24\times +$ a $24\times \cdot$.
2. Která z následujících pravidel platí, mají-li výrazy smysl?
   a) $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T} + \boldsymbol{B})^\mathsf{T} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^\mathsf{T}$, b) $(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B})^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\mathsf{T}$,
   c) $t\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B} = t(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$, d) $(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(t\boldsymbol{B})$,
   e) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})^\mathsf{T} + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})^\mathsf{T}$, f) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\mathbf{I} = \mathbf{I}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$.
3. Pravda nebo lež?
   Pro čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ je matice $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ vždy symetrická.
4. Odpovídají-li matice $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E}'$ vzájemně inverzním řádkovým úpravám (např. přičtení a odečtení t-násobku), potom platí: a) $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}' = \mathbf{0}$, b) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}' = \mathbf{0}$, c) $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}' = \mathbf{0}$, d) $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}' = \mathbf{I}$.

Komentář k řešení kvízu

1. Součin má 6 prvků a pro každý je třeba vynásobit 4 dvojice čísel a tyto 4 součiny sečíst pomocí 3 součtů.
2. Porovnáme výrazy odpovídajícím prvkům matic na levých a na pravých stranách, např. $((\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{B})^{\mathsf{T}})_{ij} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{B})_{ji} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{ji} + b_{ji} = a_{ij} + b_{ji} = a_{ij} + (\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})_{ij} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})_{ij}$.
   U b) má být správně $(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{B})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}$.
3. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ij} + (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$.
   Stejný výraz dostaneme i pro „symetrický“ prvek $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{ji}$
4. Protože jde o inverzní úpravy, je $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \mathbf{I}\boldsymbol{A}$.
   Alternativně stačí ověřit vztahy pro elementární úpravy součtu a t-násobku. Např.: $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Která z tvrzení pro počítání s maticemi by přestala platit, pokud by *součin* jednotlivých čísel nebyl komutativní?
- Která by přestala platit, pokud by *součet* nebyl komutativní?
- Jaké jsou předpoklady pro velikosti bloků v pravidlech pro součin blokových matic?
- Jak vypadají elementární matice pro zbývající elementární operace: přičtení t-násobku i-tého řádku k j-tému a pro záměnu dvou řádků?
- Co dává součin s elementární maticí *zprava*, neboli $\boldsymbol{AE}$?