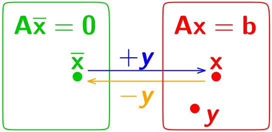
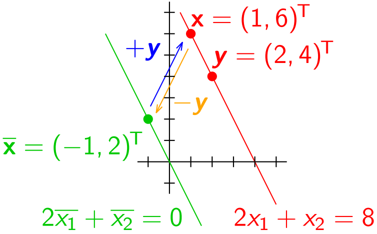
Homogenní a nehomogenní soustavy

Značení: Vektory stejné délky sčítáme a odečítáme po složkách. Vektor násobíme reálným číslem též po složkách.

Pozorování: Jsou-li $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ dvě řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ potom $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ je řešením homogenní soustavy $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$.





Důkaz: $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \overset{*}{=} \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

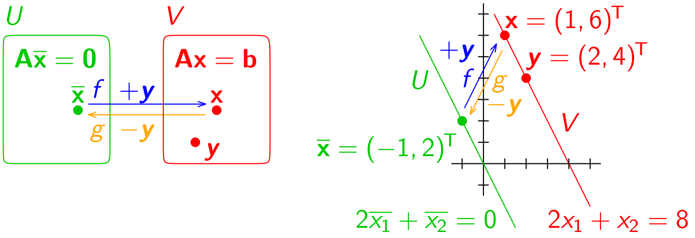
$*$: $a_{i1}(x_1 - y_1) + \cdots + a_{in}(x_n - y_n) = (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) - (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)$

Ukázka: $2(-1) + 2 = 2(1-2) + (6-4) \overset{*}{=} (2 \cdot 1 + 6) - (2 \cdot 2 + 4) = 8 - 8 = 0$

Pozorování: Pokud $\boldsymbol{y}$ je řešením $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a $\overline{\boldsymbol{x}}$ je řešením $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, pak $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}$ je řešením $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Důkaz: Analogicky: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Ay} = \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Homogenní a nehomogenní soustavy



Věta: Nechť $\boldsymbol{y}$ splňuje $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Poté zobrazení $\overline{\boldsymbol{x}} \to \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}$ je bijekce mezi množinami $\{\overline{\boldsymbol{x}} \colon \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}\}$ a $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$.

Důkaz: Označme $U = \{\overline{\boldsymbol{x}} \colon \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}\}$, $V = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$, $f \colon U \to V$ dané $f(\overline{\boldsymbol{x}}) = \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}$ a $g \colon V \to U$ dané $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ je identita na } U \;\Rightarrow\; f \text{ je prosté} \\ f \circ g \text{ je identita na } V \;\Rightarrow\; f \text{ je „na“} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ je bijekce.}$$

Řešení homogenních soustav $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

Věta: Je-li $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice hodnosti r, pak všechna řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ lze popsat jako $\overline{\boldsymbol{x}} = p_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 + p_2\overline{\boldsymbol{x}}_2 + \cdots + p_{n-r}\overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$, kde

- $p_1, \ldots, p_{n-r}$ jsou libovolné reálné parametry a
- $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ jsou vhodná řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ (jde o $n - r$ *vektorů*).

Soustava má pouze triviální řešení $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, právě když $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.

Ukázka:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{x}_1 &= -4\overline{x}_2 - 3\overline{x}_3 - 2\overline{x}_4 - \overline{x}_5 = -4\overline{x}_2 + 4\overline{x}_4 \\ \overline{x}_3 &= -2\overline{x}_4 - \overline{x}_5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2\overline{x}_4 \\ \overline{x}_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nahradíme-li $\overline{x}_2$ a $\overline{x}_4$ parametry p_1 a p_2, dostaneme:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= -4\overline{x}_2 + 4\overline{x}_4 = -4p_1 + 4p_2 \\ \overline{x}_2 &= p_1 \\ \overline{x}_3 &= -2\overline{x}_4 = -2p_2, \\ \overline{x}_4 &= p_2 \\ \overline{x}_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{neboli } \overline{\boldsymbol{x}} = p_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 + p_2\overline{\boldsymbol{x}}_2 = p_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení homogenních soustav $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

Věta: Je-li $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice hodnosti r, pak všechna řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ lze popsat jako $\overline{\boldsymbol{x}} = p_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 + p_2\overline{\boldsymbol{x}}_2 + \cdots + p_{n-r}\overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$, kde

- $p_1, \ldots, p_{n-r}$ jsou libovolné reálné parametry a
- $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ jsou vhodná řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ (jde o $n-r$ *vektorů*).

Soustava má pouze triviální řešení $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, právě když $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.

Důkaz: Přejmenujme volné proměnné na *parametry* $p_1, \ldots, p_{n-r}$. Zpětnou substitucí vyjádříme každou složku řešení jako lineární funkci volných proměnných s *koeficienty* $q_{1,1}, \ldots, q_{n,n-r}$, tj.

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= q_{1,1}p_1 + \cdots + q_{1,n-r}p_{n-r} \\ &\vdots \\ \overline{x_n} &= q_{n,1}p_1 + \cdots + q_{n,n-r}p_{n-r} \end{aligned}$$

Zvolíme $\overline{\boldsymbol{x}}_1 = (q_{1,1}, \ldots, q_{n,1})^{\mathsf{T}}, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r} = (q_{1,n-r}, \ldots, q_{n,n-r})^{\mathsf{T}}$.

Ty řeší $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, neboť každé $\overline{\boldsymbol{x}}_i$ je dáno volbou: $p_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

Je-li $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$, proměnné jsou jen bázické a $\mathbf{0}$ je jediné řešení.

Řešení homogenních soustav $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

Věta: Je-li $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice hodnosti r, pak všechna řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ lze popsat jako $\overline{\boldsymbol{x}} = p_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 + p_2\overline{\boldsymbol{x}}_2 + \cdots + p_{n-r}\overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$, kde

- $p_1, \ldots, p_{n-r}$ jsou libovolné reálné parametry a
- $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ jsou vhodná řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ (jde o $n - r$ *vektorů*).

Soustava má pouze triviální řešení $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, právě když $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.

Důsledek pro *nehomogenní* soustavy:
Nechť soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má neprázdnou množinu řešení, kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice hodnosti r. Pak všechna řešení $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lze popsat jako $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + p_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 + \cdots + p_{n-r}\overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$, kde

- $p_1, \ldots, p_{n-r}$ jsou libovolné reálné parametry,
- $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ jsou vhodná řešení soustavy $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ a
- $\boldsymbol{y}$ je libovolné řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Řešení soustav $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ — shrnutí a ukázka

1. Převedeme rozšířenou matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ do odstupňovaného tvaru:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$$

2. Pokud je pivot v posledním sloupci, žádné řešení neexistuje.
3. Jinak vyřešíme nejprve homogenní soustavu $\boldsymbol{A}'\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \overline{x}_5 &= 0 \\ \overline{x}_3 &= -2\overline{x}_4 - \overline{x}_5 &&= -2\overline{x}_4 \\ \overline{x}_1 &= -4\overline{x}_2 - 3\overline{x}_3 - 2\overline{x}_4 - \overline{x}_5 &&= -4\overline{x}_2 + 4\overline{x}_4 \end{aligned}$$

4. Volné proměnné v popisu řešení $\overline{\boldsymbol{x}}$ nahradíme parametry:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = p_1(-4, 1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}} + p_2(4, 0, -2, 1, 0)^{\mathsf{T}}$$

5. Nakonec najdeme nějaké řešení nehomogenní soustavy $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, např. $\boldsymbol{y} = \left(4, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$ a dostaneme:

$$\boldsymbol{x} = \left(4, -1, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}} + p_1(-4, 1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}} + p_2(4, 0, -2, 1, 0)^{\mathsf{T}}$$

Provedení zkoušky

Dosadíme řešení $\boldsymbol{x}$ *včetně parametrů* do *původní* soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, neboli ověříme $\boldsymbol{y}$ pro $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a také $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ pro $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$.

Ukázka:

Do soustavy
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \phantom{{}+ 6x_4 + 3x_5} &= 0 \\ 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Dosadíme
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \left(4, -1, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}} + p_1(-4, 1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}} + p_2(4, 0, -2, 1, 0)^{\mathsf{T}} \\ &= \left(4 - 4p_1 + 4p_2, -1 + p_1, -2p_2, \tfrac{1}{3} + p_2, \tfrac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}} \text{ následovně:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4 - 4p_1 + 4p_2) + 4(p_1 - 1) + 3(-2p_2) + 2(\tfrac{1}{3} + p_2) + \tfrac{1}{3} &= 1 \\ 2(4 - 4p_1 + 4p_2) + 8(p_1 - 1) + 4(-2p_2) &= 0 \\ 3(-2p_2) + 6(\tfrac{1}{3} + p_2) + 9 \cdot \tfrac{1}{3} &= 5 \\ 2(4 - 4p_1 + 4p_2) + 8(p_1 - 1) + 7(-2p_2) + 6(\tfrac{1}{3} + p_2) + 3 \cdot \tfrac{1}{3} &= 3 \end{aligned}$$

Všimněte si, že parametry na levé straně se navzájem odečtou.

Co zkoušky ověřují

Pokud nedosadíme řešení $\boldsymbol{x}$ včetně parametrů do původní soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, nemusíme odhalit následující chyby:

- Dosazení bez parametrů ověří pouze řešení $\boldsymbol{y}$.
- Konkrétní volba parametrů ověří jen jedno popisované řešení, nikoli všechna. Nemuseli bychom odhalit vadná řešení.

Ukázka: K soustavě $2x_1 + x_2 = 8$ zkoušíme $\boldsymbol{x} = (1,3)^{\mathsf{T}} + p_1(1,1)^{\mathsf{T}}$. Pro $p_1 = 1$ máme $\boldsymbol{x} = (2,4)^{\mathsf{T}}$, což splňuje $2 \cdot 2 + 4 = 8$, ale samo $\boldsymbol{y} = (1,3)^{\mathsf{T}}$ ani jiné hodnoty parametrů nedávají platná řešení.

- Dosazení do $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ ověřuje správnost zpětné substituce, ale už ne správnost Gaussovy eliminace.

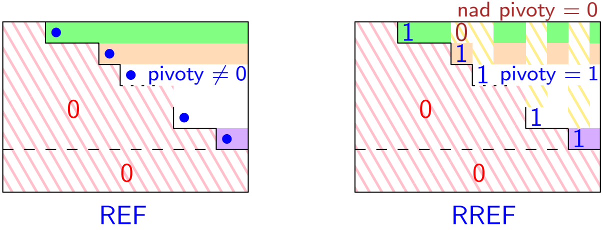
Upozornění: Zatím neumíme ověřit úplnost množiny řešení. Může se stát, že chybou v Gaussově eliminaci přidáme novou podmínku, a proto určíme jen *podmnožinu* všech řešení.

Např. při chybě v posledním sloupci nemusíme dostat žádné řešení:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \underset{+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) ✔ \text{ vs. } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \underset{+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) ✘$$

Redukovaný odstupňovaný tvar

Definice: Odstupňovaný tvar matice je *redukovaný* pokud je každý pivot roven 1 a všechny ostatní prvky ve sloupcích s pivoty jsou 0.



Redukovaný odstupňovaný tvar

Definice: Odstupňovaný tvar matice je *redukovaný* pokud je každý pivot roven 1 a všechny ostatní prvky ve sloupcích s pivoty jsou 0.

Fakt: Každá matice $\boldsymbol{A}$ má jedinečný redukovaný odsupňovaný tvar $\boldsymbol{A}'$ t.ž. $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$. "Dů": odlišné RREF dávají různá řešení.

Libovolnou matici v odstupňovaném tvaru lze redukovat takto:

- Vydělíme řádky $a_{i,j(i)}$, čímž získáme 1 jako pivoty.
- Pro každé $i = r, \ldots, 1$, eliminujeme každé $a_{i',j(i)}$ s $i' < i$ přičtením $-a_{i',j(i)}$-násobku i-tého řádku k i'-tému řádku. čímž dostaneme 0 nad pivot $a_{i,j(i)}$.

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \underset{:6}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{-3\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -4 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Tento proces se někdy nazývá *Gaussova-Jordanova eliminace*.

Výhody redukovaného odsupňovaného tvaru

$$\boldsymbol{x} = \left(-\tfrac{4}{3}, 0, -\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}} + p_1(-4, 1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}} + p_2(4, 0, -2, 1, 0)^{\mathsf{T}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -4 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -4 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

dává přímo řešení

$\boldsymbol{y} = \left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$

volbou $x_2 = x_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

dává přímo řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

$\overline{\boldsymbol{x}}_1 = (-4, 1, 0, 0, 0)^{\mathsf{T}}$

volbou $\overline{x}_2 = 1$ a $\overline{x}_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

dává přímo řešení $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$

$\overline{\boldsymbol{x}}_2 = (4, 0, -2, 1, 0)^{\mathsf{T}}$

volbou $\overline{x}_2 = 0$ a $\overline{x}_4 = 1$

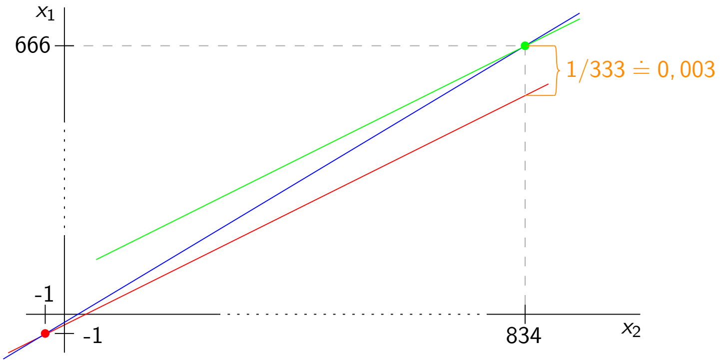
Špatně podmíněná soustava

$$\begin{aligned} 667x_1 - 835x_2 &= 168 \\ 266x_1 - 333x_2 &= \mathbf{67} \end{aligned}$$

řešení $\boldsymbol{x} = (-1, -1)^\mathsf{T}$

$$\begin{aligned} 667x_1 - 835x_2 &= 168 \\ 266x_1 - 333x_2 &= \mathbf{68} \end{aligned}$$

řešení $\boldsymbol{x} = (834, 666)^\mathsf{T}$



Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Mějme $\boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. Potom zobrazení $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
   a) je bijekcí mezi množinami řešení soustav $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
   b) je bijekcí na množině řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
   c) je bijekcí mezi množinami řešení $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$
   d) je bijekcí mezi množinami řešení $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{y}$
   e) není bijekcí (např. je jen prosté, ale nikoli na).
2. Má-li soustava pevný počet proměnných, pak počet parametrů popisující množinu řešení se růstem hodnosti matice soustavy
   a) také roste   b) klesá   c) na hodnosti nezávisí
3. Pravda nebo lež?
   Každý redukovaný odstupňovaný tvar obsahuje nějakou nulu.
4. Pokud soustavy s maticemi $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mají stejné množiny řešení, t.j. $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'\}$, tak potom
   a) $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$ vždy,   b) platí a) jen když mají řešení
   c) $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ vždy,   d) obecně ani $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ nemusí platit.

Komentář k řešení kvízu

1. Dosazením dostaneme $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$. Zobrazení je bijekcí, protože odečítání $\boldsymbol{y}$ je jeho inverzí.
2. Roste-li hodnost, roste počet bázických proměnných a klesá počet volných, tedy i parametrů.
3. Matice mající jeden řádek začínající 1 jsou v redukovaném tvaru a nemusejí obsahovat nulu, např. $(1\ 5)$.
4. Pokud řešení existuje, lze jej vyčíst z redukovaného tvaru $(\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{b}'')$, přičemž obě matice mají tento redukovaný tvar shodný a to včetně pravé strany (z věty o jednoznačnosti). Odtud $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}''|\boldsymbol{b}'') \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$.

   Pro soustavy bez řešení neplatí ani $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$, např. soustavy s maticemi $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ a $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ nemají řešení, přičemž a prvek 1 v jedné matici nelze získat kombinací 0 z druhé.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak skládání zobrazení souvisí s vlastnostmi „být prosté“ a „být na“? — doplňte podrobnosti z důkazu věty o bijekci.
- Proč je možné vyjádřit hodnoty bázických proměnných jako *lineární* funkcí volných proměnných?
- Je Gaussova-Jordanova eliminace asymptoticky výpočetně stejně těžká, jednodušší nebo náročnější než Gaussova eliminace spolu se zpětnou substitucí?