# Vzorová úloha — soustava lineárních rovnic

Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + \phantom{9}x_5 &= 1 \\
2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \phantom{{} + 6x_4 + 9x_5} &= 0 \\
3x_3 + 6x_4 + 9x_5 &= 5 \\
2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

Otázky:

- Jak efektivně/úsporně popsat soustavu?
- Co rozumíme řešením soustavy?
- Jak získat nějaké, případně všechna řešení soustavy?

# Reálné vektory

Definice: Reálný *vektor* $\boldsymbol{b}$ o $m$ složkách

je uspořádaná $m$-tice reálných čísel $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Zapíšeme $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Uvažujeme *sloupcové* vektory.
Pro řádkový zápis
používáme transpozici, tzn. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\mathsf{T}$.

Vektor $\mathbf{0}_m = (0, \ldots, 0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$ je *nulový vektor*.
Je-li kontext zřejmý, lze index vynechat a psát jen $\mathbf{0}$.

Uspořádaná $n$-tice proměnných $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$
je *vektor neznámých*.

# Reálné matice

Definice: Reálná *matice* $\boldsymbol{A}$ *typu* $m \times n$ je soubor $mn$ reálných čísel uspořádané do tabulky s $m$ řádky a $n$ sloupci.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Píšeme $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Prvky matice značíme $(\boldsymbol{A})_{i,j} = a_{i,j}$.
Jsou-li indexy zřejmé, lze čárku vynechat a psát jen $a_{ij}$, $(\boldsymbol{A})_{ij}$.
Jinak čárku ponecháme, např. pro odlišení $a_{12,3}$ oproti $a_{1,23}$; anebo $a_{i,jk}$ oproti $a_{ij,k}$; pro prvek $a_{i,j(i)}$ apod.

*Čtvercové* matice *řádu* $n$ mají $n$ řádků i sloupců.

# Soustavy lineárních rovnic

Definice: Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\mathsf{T}$ je vektor neznámých.

*Soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých* je $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, v rozšířené formě zapsaná jako:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matice $\boldsymbol{A}$ je *matice soustavy*,
vektor $\boldsymbol{b}$ je *vektor pravých stran*,
matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ je *rozšířená matice soustavy*.

Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *řešení* soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pokud splňuje všechny její rovnice, tj.

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ se nazývají *homogenní* a vždy umožňují $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

# Ukázka

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + \phantom{3}x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \phantom{{}+ 6x_4 + 3x_5} &= 0 \\ 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 3 \end{aligned}$$

je tvořena jejími koeficienty:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

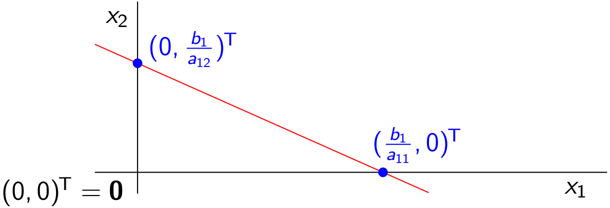
Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_5)^{\mathsf{T}} = \left(4, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$ je jedním z možných řešení této soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, neboť splňuje všechny její rovnice:

$$\begin{aligned} 4 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot \tfrac{1}{3} + \phantom{3 \cdot{}} \tfrac{1}{3} &= 1 \\ 2 \cdot 4 + 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 &= 0 \\ 3 \cdot 0 + 6 \cdot \tfrac{1}{3} + 9 \cdot \tfrac{1}{3} &= 5 \\ 2 \cdot 4 + 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 0 + 6 \cdot \tfrac{1}{3} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} &= 3 \end{aligned}$$

# Geometrický význam — jedna rovnice o dvou neznámých

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ ekvivalentně $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \end{pmatrix}$

- Je-li $a_{11} \neq 0$ nebo $a_{12} \neq 0$, pak množina řešení tvoří přímku.




- Může být rovnoběžná s jednou z os, např. s $x_1$, pokud $a_{11} = 0$.

*Degenerované* případy:

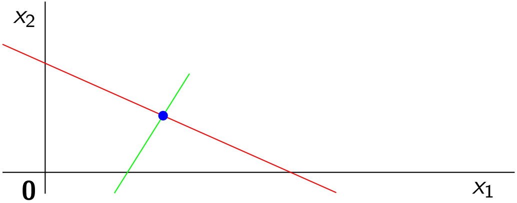
- Pokud $a_{11} = a_{12} = 0$ a $b_1 \neq 0$, pak systém nemá řešení.
- Jestliže $a_{11} = a_{12} = 0$ a $b_1 = 0$, pak jsou řešením všechny body euklidovské roviny.

# Dvě rovnice o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Pokud jsou obě rovnice nedegenerované, pak množina řešení je průsečíkem dvou přímek, což může být

- bod:



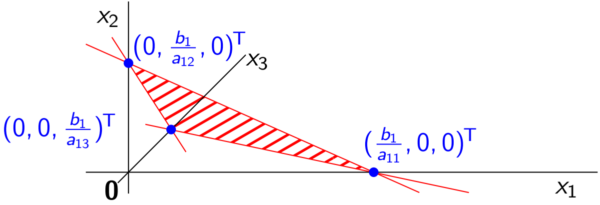

- prázdná množina, pokud jsou přímky různé a rovnoběžné,
- přímka, pokud jsou obě přímky totožné.

Mezi degenerované případy patří soustava $\mathbf{0x} = \mathbf{0}$,
která dává všechny body euklidovské roviny jako množinu řešení.

# Jedna rovnice o třech neznámých

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

- V nedegenerovaném případě $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{13} \neq 0$ řešení tvoří rovinu v $3$-rozměrném euklidovském prostoru:




Degenerované případy:

- Pokud $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$ a $b_1 \neq 0$, pak řešení neexistuje.
- Jestliže $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$ a $b_1 = 0$, pak jsou řešením všechny body euklidovského prostoru.

# Elementární ekvivalentní řádkové úpravy

Definice: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ píšeme, pokud lze $\boldsymbol{A}'$ získat z $\boldsymbol{A}$ jakoukoli z následujících *elementárních ekvivalentních řádkových úprav*:

1. Vynásobení $i$-tého řádku *nenulovým* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   formálně: $a'_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & \text{pro } k \neq i \\ ta_{il} & \text{pro } k = i \end{cases}$

2. Přičtení $j$-tého řádku k $i$-tému řádku,

   formálně: $a'_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & \text{pro } k \neq i \\ a_{il} + a_{jl} & \text{pro } k = i \end{cases}$

Z výše uvedených dvou lze odvodit následující dvě:

3. Přičtení $j$-tého řádku vynásobeného $t \in \mathbb{R}$ k $i$-tému řádku.
4. Záměna dvou řádků.

Provedení posloupnosti elementárních úprav značíme $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$.

# Použití elementárních úprav

Věta: Nechť $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ jsou dvě soustavy splňující $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$. Pak obě soustavy mají totožné množiny řešení.

Ukázka:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) = (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$$

Vektor $\boldsymbol{x} = \left(4, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$ splňuje i soustavu $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, protože $2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2$, a ostatní rovnice jsou jen v jiném pořadí.

Věta ovšem platí nejen pro toto konkrétní řešení a uvedené úpravy, ale i pro *každé možné* řešení a *libovolnou posloupnost* úprav.

# Použití elementárních úprav

Věta: Nechť $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$ jsou dvě soustavy splňující $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A'}|\boldsymbol{b'})$. Pak obě soustavy mají totožné množiny řešení.

Důkaz: Stačí dokázat, že množina řešení je zachována, pokud je provedena jediná úprava prvního nebo druhého typu.
Cílem je ukázat $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}\}$.
Rovnost množin plyne ze dvou inkluzí $\subseteq$ a $\supseteq$, které přepíšeme do implikací a: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$, a za b: $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

1a. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$ pro vynásobení $i$-tého řádku $t \neq 0$:
Protože se změní pouze $i$-tý řádek/rovnice, každé řešení $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ vyhovuje nezměněným rovnicím $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$.
Zbývá ověřit $i$-tou rovnici soustavy $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$.
Přechod z levé strany na pravou: $a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{in}x_n = ta_{i1}x_1 + \cdots + ta_{in}x_n = t(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = tb_i = b'_i$
Použito: $a'_{il} = ta_{il}$ (definice), $tc + td = t(c + d)$ (vytknutí), $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ (předpoklad), $tb_i = b'_i$ (definice).
Zelená barva označuje vztah mezi $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ a $(\boldsymbol{A'}|\boldsymbol{b'})$ neboli elementární úpravu; červená pak předpoklad $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Shrnutí případů jedné elementární úpravy prvního nebo druhého druhého typu a $i$-té rovnice:

1a. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$ : $a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{in}x_n =$
$ta_{i1}x_1 + \cdots + ta_{in}x_n = t(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = tb_i = b'_i$

1b. $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ : $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n =$
$\frac{1}{t}(ta_{i1}x_1 + \cdots + ta_{in}x_n) = \frac{1}{t}(a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{in}x_n) = \frac{1}{t}b'_i = \frac{1}{t}tb_i = b_i$

2a. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'}$ : $a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{in}x_n =$
$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n =$
$(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + b_j = b'_i$

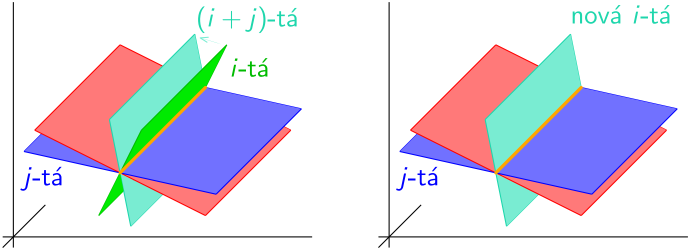
2b. $\boldsymbol{A'x} = \boldsymbol{b'} \Rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ : $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n =$
$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + b_j - b_j =$
$(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) - b_j =$
$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n - b_j =$
$(a'_{i1}x_1 + \cdots + a'_{in}x_n) - b_j = b'_i - b_j = b_i + b_j - b_j = b_i$

Barva rovnítka $=$ znamená elementární úpravu $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ na $(\boldsymbol{A'}|\boldsymbol{b'})$, nebo předpoklad daného případu nebo algebraickou úpravu členů.

# Geometrický význam elementárních úprav

1., 4. Vynásobení řádku nebo záměna dvou řádků nemění polohu nadrovin.

2., 3. Přičtení $j$-tého řádku (násobeno $t \in \mathbb{R}$) k $i$-tému řádku posune $i$-tou nadrovinu tak, že průnik s ostatními zůstává beze změny.

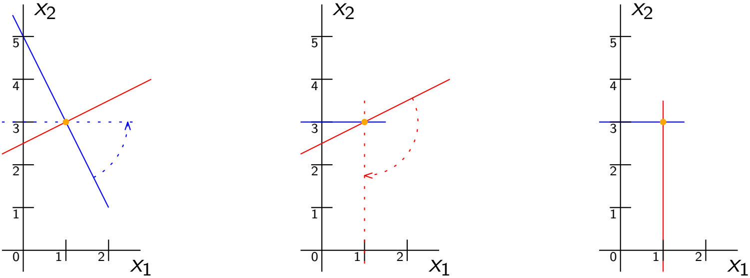


# Geometrický význam elementárních úprav

1., 4. Vynásobení řádku nebo záměna dvou řádků nemění polohu nadrovin.

2., 3. Přičtení $j$-tého řádku (násobeno $t \in \mathbb{R}$) k $i$-tému řádku posune $i$-tou nadrovinu tak, že průnik s ostatními zůstává beze změny.

Cíl: posunout nadroviny tak, aby řešení bylo možné snadno určit.




$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \quad {\scriptstyle +2\times,\ :5}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \quad {\scriptstyle -2\times,\ \cdot(-1)}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik aritmetických operací vyžaduje přičtení $t$-násobku $i$-tého řádku k $j$-tému na matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$?
   a) 1 b) 2 c) $m$ d) $n$ e) $2m$ f) $2n$
   g) $m+n$ h) $2(m+n)$ i) $mn$ j) $(mn)^2$
2. Nechť $\boldsymbol{A}'$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynásobením $i$-tého řádku $t \in \mathbb{R}$.
   V jaké relaci jsou množiny $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ a $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$?
   a) $\subseteq$ b) $=$ c) $\supseteq$ d) jsou disjunktní.
3. Pravda nebo lež?
   Soustava 4 rovnic o 3 neznámých nemá nikdy jediné řešení.
4. Pravda nebo lež?
   Vektor $\mathbf{0}$ nikdy není řešením nehomogenní soustavy rovnic.
5. Pravda nebo lež? Množiny řešení soustav $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ jsou různé pravé strany, tj. $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}'$, vždy disjunktní.

# Komentář k řešení kvízu

1. Na každé z $n$ čísel je třeba jeden součin s $t$ a jeden součet.
2. Pokud $t = 0$, má soustava $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ méně podmínek (nepočítáme-li tu vynulovanou), čili může mít více řešení. Pro $t \neq 0$ mají obě soustavy stejné množiny řešení.
3. Např. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 140 \end{array}\right)$ má jediné řešení $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.
4. Dosadíme-li do levé strany soustavy $\boldsymbol{Ax}$ vektor $\mathbf{0}$, dostaneme vždy $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, čili nikdy nezískáme nenulový vektor $\boldsymbol{b}$.
5. Je-li $\boldsymbol{x}$ řešením obou soustav, dostáváme $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}'$.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak se geometricky změní množina řešení soustavy rovnic při změně $\boldsymbol{b}$, t.j. vektoru pravých stran?
- Jak lze geometricky popsat soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, které nemají žádné řešení?
  (Rozeberte možné případy pozic přímek a rovin.)
- Může být ve třetí elementární úpravě parametr $t$ nulový?
- Kde byla využita nenulovost parametru $t$ v první elementární ekvivalentní úpravě?
- Které algebraické úpravy byly použity v důkazu případu $2b$ věty o zachování řešení při elementárních úpravách?
- Jakou vlastnost mají geometrické transformace odpovídající elementárním úpravám v případě, že soustava nemá řešení?