

Kde a jak může být lineární algebra užitečná v praxi

Jiří Fiala

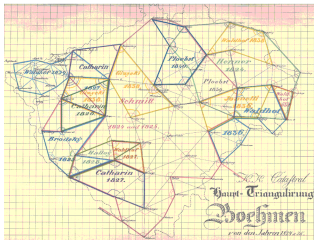
Všechny příklady jsou zjednodušené tak,
aby bylo zřejmé užití nástrojů lineární algebry.
Konkrétní implementace jsou však *značně* složitější.

Geometrické úlohy

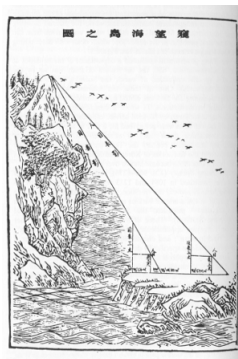
Soustavy lineárních rovnic o 2–3 neznámých vedou na úlohy typu určení průsečíku dvou přímek; průsečíku přímky a roviny, apod.

Mezi tradiční a přirozené oblasti využití patří:

- ▶ zeměměřičství — triangulace,
- ▶ deskriptivní a analytická geometrie,
- ▶ astronomie — paralaxy planet a galaxií,
- ▶ 2D a 3D grafika, tomografie, ...



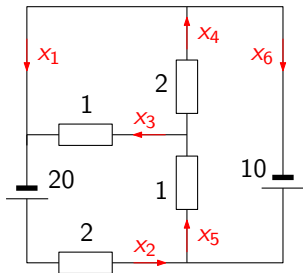
Trigonometrická síť I. řádu pro
II. vojenské mapování 1806–69
www.geolab.cz



Liou Chuej (asi 225 — asi 295):
Haidao Suanjing (Matematická
klasika mořského ostrova)
Obálka z vydání z r. 1726

Úlohy s jednotkami až stovkami proměnných

Analýza obvodů



Otázka:
Jaké proudy tečou
větvelemi obvodu?

Jednotky:

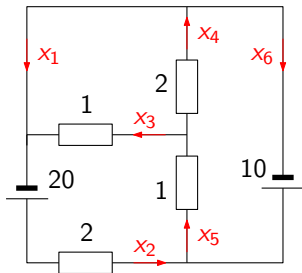
napětí: V

odpor: $k\Omega$

proud: mA

Úlohy s jednotkami až stovkami proměnných

Analýza obvodů



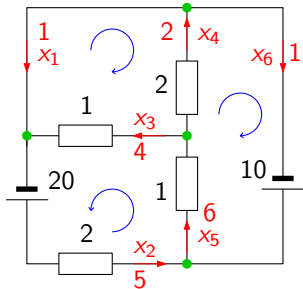
Kirchhoffovy zákony

Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

Ve smyčce je součet napětí zdrojů roven součtu napětí ($= I \cdot R$) na spotřebičích.

Úlohy s jednotkami až stovkami proměnných

Analýza obvodů



$$x_1 + x_3 = x_2$$

$$x_4 = x_1 + x_6$$

$$x_5 = x_3 + x_4$$

$$x_2 + x_6 = x_5$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

$$2x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_2 + x_5 + x_3 = 20$$

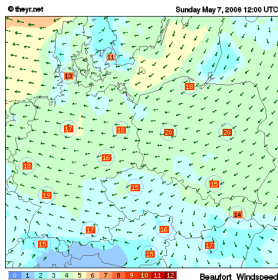
$$x_1, \dots, x_6 = 1, 5, 4, 2, 6, 1$$

Stiglerův stravovací problém (1939), vyřešen Dantzigem (1946)

Cíl je sestavit jídelníček ze 77 potravin, aby byl splněn doporučený příjem 9 různých živin a přitom byly minimalizovány náklady.

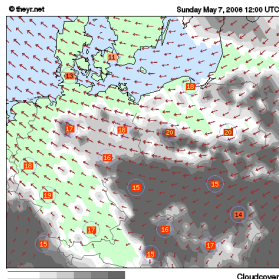
... vede na 9 nerovnic o 77 proměnných, navíc optimalizace ceny

Předpověď počasí

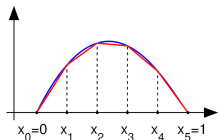


Při předpovídání počasí je nutné vypočítat s dostatečně přesně teplotu, tlak, vlhkost a také rychlost a směr proudění vzduchu v závislosti na aktuálním stavu počasí hlášeném z meteorologických stanic.

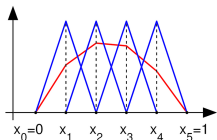
Fyzikálně lze situaci popsat soustavou diferenciálních rovnic. Jejich přesné řešení je obtížné a v některých případech i nemožné.



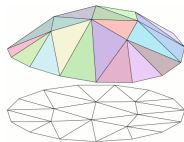
Pro řešení rozsáhlých soustav diferenciálních rovnic druhého řádu se v inženýrské praxi používá metoda konečných prvků.
Spočívá v rozdělení zkoumaného oboru hodnot na malé buňky. Na každé buňce se hledaná funkce aproximuje lineární kombinací „jednoduchých“ funkcí, např. po částech lineárních.



Aproximace hladké funkce pomocí po částech lineární funkce.

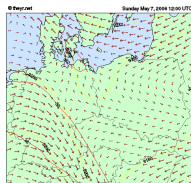
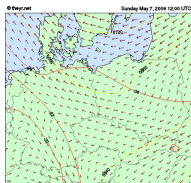
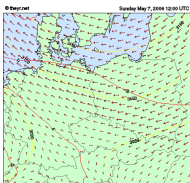


Rozklad po částech lineární funkce na lineární kombinaci jednoduchých funkcí.



Příklad po částech lineární funkce nad triangulací v \mathbb{R}^2

Pro modelování počasí v modelu ALADIN z roku 2019 je prostor nad střední Evropou rozdělen trojrozměrnou mřížkou o ploše cca 2800×2200 km (s roztečí cca 2,3 km) a 87 vertikálními hladinami. Bodů mřížky a tedy i příslušných buněk, je více než 100 000 000.



Daná soustava *diferenciálních* rovnic se převede na soustavu několika miliard *lineárních* rovnic.

Meteorologové na ČHMÚ v Komořanech potřebují a dokáží vyřešit takové soustavy. Každé 3 hodiny je předpověď počasí aktualizována podle právě vypočteného modelu.

Kompresi obrazu ve formátu jpeg

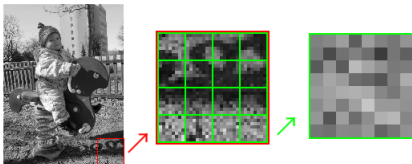
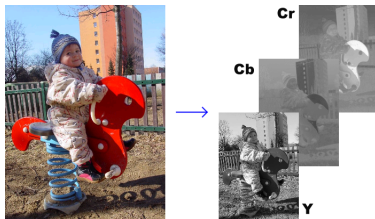
Jpeg (Joint photographic expert group) je rastrový grafický formát.

Jeho principem je následující transformace*:

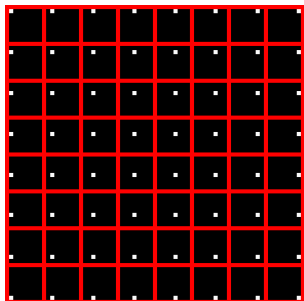
Obrázek se nejprve převede do barevného prostoru YCbCr. (Model YCbCr byl původně určený pro přenos TV signálu.)

Každá vrstva je rozřezána na díly o rozměru 8×8 bodů a každý díl je zpracován zvlášť.

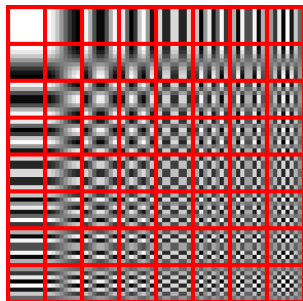
* Pro ztrátovou kompresi lze využít i jiné metody, např. SVD rozklad, což je také koncept z lineární algebry.



Namísto kódování intenzity 64 jednotlivých bodů se obraz celého dílu složí jako lineární kombinace 64 diskretních harmonických funkcí nad mřížkou 8×8 bodů, což je princip tzv. diskrétní kosinové Fourierovy transformace



Rozklad na jednotlivé body



Báze z funkcí $\cos(ix)\cos(jy)$

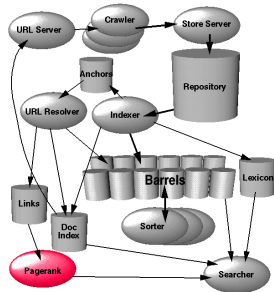
Malé koeficienty lze zanedbat, což vede ke ztrátové kompresi. Ta má ale lepší kompresní poměr než komprese bezztrátová, aniž by změny v obraze byly rozeznatelné lidským zrakem.

Vyhledávání na Google

Vyhledávání webových stránek podle klíčových slov zpravidla probíhá ve dvou fázích

1. Nejprve se najdou všechny stránky, které obsahují daná klíčová slova.
2. Potom se tato skupina utřídí podle „důležitosti“.

Pro výpočet důležitosti stránek ve vyhledávači Google byla podle *Kendall-Weiovy teorie hodnocení* (z 50. let 20. století) navržena metoda PageRank. Ta hodnotí stránky tak, aby důležitost stránky je přímo úměrná součtu důležitostí stránek, které na ni odkazují.



Představme si, že propojení *všech* webových stránek je zakódováno formou matice M , kde řádky a sloupce odpovídají stránkám a

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i\text{-tá stránka odkazuje na } j\text{-tou} \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Dostaneme tzv. *matici susednosti webu*.

Ohodnocení stránek odpovídá nezápornému vektoru x , který splňuje $Mx = cx$ pro vhodnou kladnou konstantu c .

Pak x je tzv. *vlastní vektor* matice M příslušný *vlastnímu číslu* c .

Lze ukázat, že při drobné modifikaci matice M bude vlastní číslo c s největší absolutní hodnotou reálné a kladné.

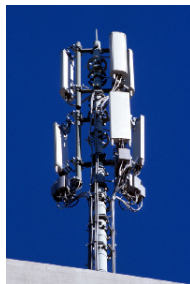
Navíc platí, že jako jediné vlastní číslo má příslušný vlastní vektor x se všemi složkami kladnými.

Několik údajů o metodě PageRank.

- ▶ Návrh metody provedli Larry Page a Sergey Brin. Projekt začal v roce 1995, první implementace byla otestována v roce 1998.
- ▶ Vektor x je aktualizován průběžně, a to tak, že každá jeho složka je přepočítána cca jednou měsíčně.
- ▶ Řád hypotetické matice M neboli počet indexovatelných webových stránek přesahuje 5 miliard.
(Údaj z roku 2022 podle worldwidewebsize.com.)
- ▶ Matice M je velmi řídká — průměrně 7 odkazů na stránku.
- ▶ Ve skutečnosti je graf sousednosti webu rozložen na menší bloky, a ani ty nejsou reprezentovány maticově. Vektor x je počítán iterativními přibližnými metodami (25–80 iterací) s pevně danou hodnotou $c = 0,85$.

Minimalizace interference v GSM sítích

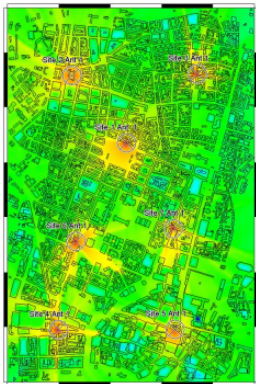
Část bezdrátové komunikace v GSM sítích probíhá mezi mobilními telefony a tzv. BTS stanicemi. Stanice je bývá osazena jednou nebo třemi anténami, které obsluhují okolí stanice, tzv. buňky. Pro komunikaci v rámci buňky se užívá jedné nebo více frekvencí, to podle počtu aktivních GSM telefonů v buňce. Na jedné frekvenci jich lze obsloužit 6–8.



Frekvence se nutně přidělit vysílačům tak, aby nevznikla žádná nebo jen minimální interference. Jednak je třeba ošetřit frekvence vysílačů stejné BTS, a také interferenci mezi stejnými nebo podobnými frekvencemi u blízkých BTS. Úroveň interference může záležet na okolním terénu a dalších faktorech.

Vhodný plán přidělení frekvencí lze získat i metodami celočíselného lineárního programování.

Zdali bude vysílači v přiřazena frekvence f udává binární proměnná x_f^v . Dále jsou zavedeny binární proměnné $x_{f,f'}^{v,v'}$, jež hlídají vznik interference mezi dvěma kolidujícími frekvencemi f a f' na blízkých vysílačích v a v' .



Podmínky úlohy ILP zaručují,

- ▶ že na každém vysílači je k dispozici správný počet frekvencí
- ▶ a že proměnné $x_{f,f'}^{v,v'}$ korektně zjišťují vznik interference.

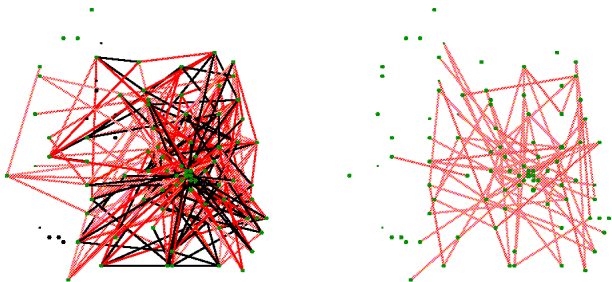
Účelová funkce je sestavena tak, aby co nejméně proměnných $x_{f,f'}^{v,v'}$ bylo kladných, a tím pádem aby i celková úroveň interference byla co nejmenší.

Realistické instance zveřejněné na FAP web mají rozsah

- ▶ 40–80 frekvencí pro 250–400 vysílačů,
t.j. 13 000–300 000 proměnných x_f^v
- ▶ 20 000–1 000 000 podmínek, čili i proměnných $x_{f,f'}^{v,v'}$

Pro některé scénáře se podařilo sestavit frekvenční plány, kde interference klesla o 80–95 % oproti skutečnému plánu.

Užití jednoho z těchto frekvenčních plánů v terénu vedlo např. ke snížení režie na předávání hovoru mezi bučkami o 20 %.



Zdroje obrázků a k dalšímu čtení

- ▶ Hudeček: Matematika v devíti kapitolách
- ▶ Stravovací problém, metoda konečných prvků, Jpeg, diskrétní kosinová Fourierova transformace, Pagerank
Wikipedia, Mathworld
- ▶ Struktura vyhledávače Google
Brin, Page: The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine, Proc. WWW 7 (1998) 107–117
- ▶ Přidělování frekvencí v GSM sítích
Eisenblätter: Assigning frequencies in GSM networks
Oper. Research Proc. 2002, Springer (2003) 33–40
Eisenblätter et al.: Frequency planning and ramifications of coloring, Disc. Math., Graph Th. 22(2002) 51–88
Whalen: Signaling processes in third generation wireless systems