

Úlohy k 5. cvičení

1. **(možné v sage)** Invertujte matice $\mathbf{A}, \dots, \mathbf{E}$ a proveďte zkoušku.

Alespoň jednu spočítejte sami ručně, pro výpočet redukovaného odstupňovaného tvaru a ověření součinu u ostatních můžete použít počítač.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Rozhodněte, zda platí následující rovnosti, pokud mají výrazy smysl.

Pokud se odvoláte na pravidlo dokázané dříve, запиšte ho a pokud možno i pojmenujte.

- | | |
|--|--|
| a) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ | d) $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^2 - (\mathbf{A}^2)^{-1}$ |
| b) $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ | e) $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^4 - \mathbf{I})$ |
| c) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$ | f) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1})(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}) = \mathbf{AB} + 2\mathbf{I} + (\mathbf{AB})^{-1}$ |

3. **(možné v sage)** Vyřešte následující maticové rovnice nejprve symbolicky a pak i numericky pro matice z 1. úlohy. Proveďte zkoušku.

- | | |
|---|---|
| a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$, | d) $(\mathbf{X}_4^{-1} - \mathbf{C})^T = \mathbf{D}$ |
| b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$, | e) $(\mathbf{AX}_5)^{-1} + \mathbf{C} = \mathbf{E}$ |
| c) $\mathbf{AX}_3^{-1} = \mathbf{E}^T$ | f) $\mathbf{D}^T\mathbf{X}_6^{-1} = \mathbf{B} + 2\mathbf{I}$ |

4. Za předpokladu, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ jsou regulární, zjednodušte výraz

$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$. Jakou vlastnost má matice $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$?

5. Rozhodněte, zda jsou následující struktury grupy (ověřte axiomy nebo nějaký vyvráťte)

- $(\mathbb{R}^2, +)$
- $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, zde $\mathbb{R}^+$ značí kladná reálná čísla
- $((\mathbb{R}^+)^2, +)$
- $(\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}, \cdot)$

6. Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p , q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$ (permutace skládáme jako zobrazení, $(q \circ p)(i) = q(p(i))$).

- $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$
- $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$
- $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$, $q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$
- $p = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$, $q = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

7. Spočítejte mocniny p^{10} a q^{99} pro permutace p a q .

8. **(možné v sage)** Řešte „permutační“ rovnici $p \circ x \circ q = \text{id}$ pro permutace p a q .