

Úlohy k 4. cvičení

1. **(možné v sage)** Řešte soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jak spolu souvisejí geometrické interpretace těchto soustav?

Pro výpočet jednoho odstupňovaného tvaru můžete použít počítač.

2. Rozhodněte, zda pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla r, s platí:

Pravidlo dokažte porovnáním matic po složkách; vyvraťte ho konstrukcí protipříkladu.

- | | |
|--|---|
| a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ | h) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$ |
| b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ | i) $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$ |
| c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ | j) $r\mathbf{A} + s\mathbf{B} = (r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ |
| d) $r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$ | k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ |
| e) $r(s\mathbf{A}) = s(r\mathbf{A})$ | l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ |
| f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$ | m) $(r\mathbf{A})^T = r(\mathbf{A}^T)$ |
| g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ | |

3. Rozhodněte, zda platí následující rovnosti, pokud mají výrazy smysl.

Pokud se odvoláte na pravidlo dokázané dříve, запиšte ho a pokud možno i pojmenujte.

- | | |
|---|---|
| a) $(\mathbf{A}^T + \mathbf{B})^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ | d) $(t\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(t\mathbf{B})$ |
| b) $(\mathbf{A}^T \mathbf{B})^T = \mathbf{AB}^T$ | e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T \mathbf{C}^T = (\mathbf{CB})^T + (\mathbf{CA})^T$ |
| c) $\mathbf{A} + t\mathbf{B} = t(\mathbf{B} + \frac{1}{t}\mathbf{A})$ | f) $\mathbf{A}^T \mathbf{I} = \mathbf{IA}^T$ |

4. Spočítejte součiny $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{CD}$ a $\mathbf{DE}$ pro matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

5. Spočítejte součiny $\mathbf{A}_i \mathbf{B}$ a $\mathbf{BA}_i$, pro matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Jakým úpravám matice $\mathbf{B}$ odpovídají příslušné součiny?

6. **(možné v sage)** Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ zkonstruuje matici $\mathbf{B}$ tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Najděte takovou symetrickou $\mathbf{B}$. Náповědou vám budou matice z předchozí úlohy.

Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické? Své zjištění ověřte na několika náhodných symetrických maticích na počítači.