

Jméno a příjmení:

Kolik času jste potřebovali na vyřešení úloh? (včetně zápisu řešení):

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ vyřešte následující soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a proveďte zkoušku

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \vdots \\ \vdots \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Pro úplnost: matice soustavy je čtvercová řádu $n \times n$, má na diagonále 2, pod diagonálou 1 a nad diagonálou 3. Vektor pravých stran tvoří samé 4 a je jich n .)

2. Rozhodněte, zdali pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ platí identita:

$$((\mathbf{A} + 2\mathbf{B})^2 + \mathbf{C}^T \mathbf{A} - 4\mathbf{B})^T = (\mathbf{B}^T - \mathbf{I}_5)(4\mathbf{B})^T + \mathbf{A}^T \mathbf{C} + \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T + 4\mathbf{B}^T)$$

Druhá mocnina čtvercové matice $\mathbf{M}$ je definována jako součin se sebou samou: $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}$.

Pokud identita platí, zdůvodněte proč platí. Pro vyvrácení nezapomeňte nalézt vhodné matice, aby identita neplatila.

Pro plný počet bodů je třeba předložit zápis řešení, kde jsou všechny výpočty popsány bez použití počítače. Jinými slovy: úlohu lze snadno vyřešit hrubou silou za použití počítače, ale to není cílem této úlohy. Počítač můžete použít k získání správného rozhodnutí, ale pak je ho třeba obhájit vlastními silami.

Instrukce k řešení domácích úloh: Důležitý je nejen výsledek (ten lze s různou přesností zjistit různými způsoby: graficky, analyticky, apod.), ale především způsob, jak jste k němu dospěli. Srozumitelně popište podstatné kroky svých úvah. Přehledně запиšte výpočty použité k odvození výsledku. U numerických výsledků spočítejte i konkrétní čísla. Algebraické výrazy co nejvíce zjednodušte. Nezapomeňte na odpověď (a pro svůj klid ani na zkoušku, jde-li ji provést).

Pokud v zadání není uvedeno, že smíte použít počítač, je třeba celý výpočet zapsat. Počítač však vždy můžete použít k tomu, abyste si ověřili, že svůj výsledek, případně i jeho výpočet máte správně.

Úlohy si nejprve vyřešte stranou. Odevzdávejte až čistopis svého řešení bez chyb a škrtání. Nečitelné práce se nehodnotí. K odevzdání použijte nejlépe owl na kam.mff.cuni.cz/owl, nebo je vypracujte na papír. K tomu si můžete vytisknout i toto zadání a řešení zapsat na volné místo na stránce.

Dojde-li vám na papíře místo, vezměte další listy kancelářského papíru formátu A4, každý podepište, očíslovte a uveďte jejich počet. Odevzdané papíry budou skenovány, proto je nesešívejte ani neslepujte.