

Úlohy k 3. cvičení

1. **(jednu variantu spočítejte ručně, ostatní můžete v sage)** Popište všechna řešení následujících soustav lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$	d) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 4 \end{aligned}$
e) $\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20 \end{aligned}$	f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$

2. **(možné v sage)** Najděte alespoň jedno řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a alespoň jedno *netriviální* řešení $\mathbf{y}$ soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a ověřte, že $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ je řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Uvažte následující matici a vektor:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & 20 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (-9, 5, 18, 1)^T.$$

3. Ukažte, že jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ dvě řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a α je libovolné reálné číslo, potom je jejím řešením i vektor: $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1 - \alpha)x'_2, \dots, \alpha x_n + (1 - \alpha)x'_n)^T$.

Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ dané soustavy.

4. **(možné v sage)** Řešte soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jak spolu souvisejí geometrické interpretace těchto soustav?

Pro výpočet jednoho odstupňovaného tvaru můžete použít počítač.

5. Rozhodněte, zda pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla r, s platí:

$$\text{a) } \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\text{d) } r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A}$$

$$\text{e) } r(s\mathbf{A}) = s(r\mathbf{A})$$

$$\text{f) } \mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\text{g) } 1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\text{h) } r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$$

$$\text{i) } (r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$$

$$\text{j) } r\mathbf{A} + s\mathbf{B} = (r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$\text{k) } (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$\text{l) } (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$\text{m) } (r\mathbf{A})^T = r(\mathbf{A}^T)$$