

Úlohy k 2. cvičení

1. Převeďte následující matice na odstupňovaný tvar:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 13 & 18 \\ 6 & -9 & 7 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Nalezněte alespoň jedno netriviální řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pro matice $\mathbf{A}$ z předchozí úlohy, pokud takové existuje.

3. (**jednu variantu spočítejte ručně, ostatní můžete v sage**) Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \begin{array}{l} 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3 \\ 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9 \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16 \\ 46x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -18 \end{array} & \text{d) } \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{e) } \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{array} & \text{f) } \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 4x_5 = -4 \\ 5x_1 + 5x_2 + 8x_4 - x_5 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{array} \end{array}$$

4. Ukažte, že jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ dvě řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a α je libovolné reálné číslo, potom je jejím řešením i vektor:
 $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1 - \alpha)x'_2, \dots, \alpha x_n + (1 - \alpha)x'_n)^T$.

Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ dané soustavy.

5. (**možné v sage**) Najděte alespoň jedno řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a alespoň jedno *netriviální* řešení $\mathbf{y}$ soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a ověřte, že $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ je řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Uvažte následující matici a vektor:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & -4 & 20 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (-9, 5, 18, 1)^T.$$