

Vytvořující funkce

V krabici jsou 3 červené, 4 žluté a 5 zelených míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Vytvořující funkce

V krabici jsou 3 červené, 4 žluté a 5 zelených míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Řešení rozborem případů:

3 červené, x žlutých a $4 - x$ zelené $x \in \{0, \dots, 4\}$... 5 možností

2 červené, x žlutých a $5 - x$ zelené $x \in \{0, \dots, 4\}$... 5 možností

1 červený, x žlutých a $6 - x$ zelené $x \in \{1, \dots, 4\}$... 4 možnosti

0 červený, x žlutých a $7 - x$ zelené $x \in \{2, \dots, 4\}$... 3 možnosti

Celkem 17 možností.

Vytvořující funkce

V krabici jsou 3 červené, 4 žluté a 5 zelených míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Jiný postup:

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 10x^9 + 14x^8 + 17x^7 + 18x^6 + 17x^5 + \\ & 14x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Celkem je 17 možností jak vybrat 7 míčků,
ale také např. 6 způsobů jak vybrat 10 míčků
nebo 14 způsobů jak vybrat 4 míčky.

Vytvořující funkce

V krabici je **30** červených, **40** žlutých a **50** zelených míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat **70** míčků?

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + \dots + x^{40})(1 + x + \dots + x^{50}) = \dots + ??? x^{70} + \dots$$

Vytvořující funkce

V krabici je **30** červených, **40** žlutých a **50** zelených míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat **70** míčků?

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + \dots + x^{40})(1 + x + \dots + x^{50}) = \\ &= \frac{1 - x^{31}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{51}}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x)^3} \cdot (1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51}) \\ &= \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots \right) (1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51}) \\ &= 1 + \dots + \underbrace{\left[\binom{72}{2} - \binom{72-31}{2} - \binom{72-41}{2} - \binom{72-51}{2} \right]}_{1061} x^{70} + \dots \end{aligned}$$

Odpověď: 70 míčků lze vybrat 1061 způsoby.

Jak může vyjít součin nekonečné řady s mnohočlenem opět konečný mnohočlen?

Jednoduše:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 - x^{31}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x}$$

podobně pro zbylé dva faktory $1 - x^{41}$ a $1 - x^{51}$

Ve skutečnosti $\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots$

není nic jiného než $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3$.

Pro zajímavost

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + \dots + x^{40})(1 + x + \dots + x^{50}) = \\ & x^{120} + 3x^{119} + 6x^{118} + 10x^{117} + 15x^{116} + 21x^{115} + 28x^{114} + 36x^{113} + \\ & 45x^{112} + 55x^{111} + 66x^{110} + 78x^{109} + 91x^{108} + 105x^{107} + 120x^{106} + \\ & 136x^{105} + 153x^{104} + 171x^{103} + 190x^{102} + 210x^{101} + 231x^{100} + 253x^{99} + \\ & 276x^{98} + 300x^{97} + 325x^{96} + 351x^{95} + 378x^{94} + 406x^{93} + 435x^{92} + 465x^{91} + \\ & 496x^{90} + 527x^{89} + 558x^{88} + 589x^{87} + 620x^{86} + 651x^{85} + 682x^{84} + 713x^{83} + \\ & 744x^{82} + 775x^{81} + 806x^{80} + 836x^{79} + 865x^{78} + 893x^{77} + 920x^{76} + 946x^{75} + \\ & 971x^{74} + 995x^{73} + 1018x^{72} + 1040x^{71} + \mathbf{1061x^{70}} + 1080x^{69} + 1097x^{68} + \\ & 1112x^{67} + 1125x^{66} + 1136x^{65} + 1145x^{64} + 1152x^{63} + 1157x^{62} + 1160x^{61} + \\ & 1161x^{60} + 1160x^{59} + 1157x^{58} + 1152x^{57} + 1145x^{56} + 1136x^{55} + 1125x^{54} + \\ & 1112x^{53} + 1097x^{52} + 1080x^{51} + 1061x^{50} + 1040x^{49} + 1018x^{48} + 995x^{47} + \\ & 971x^{46} + 946x^{45} + 920x^{44} + 893x^{43} + 865x^{42} + 836x^{41} + 806x^{40} + \\ & 775x^{39} + 744x^{38} + 713x^{37} + 682x^{36} + 651x^{35} + 620x^{34} + 589x^{33} + \\ & 558x^{32} + 527x^{31} + 496x^{30} + 465x^{29} + 435x^{28} + 406x^{27} + 378x^{26} + \\ & 351x^{25} + 325x^{24} + 300x^{23} + 276x^{22} + 253x^{21} + 231x^{20} + 210x^{19} + \\ & 190x^{18} + 171x^{17} + 153x^{16} + 136x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} + 91x^{12} + 78x^{11} + \\ & 66x^{10} + 55x^9 + 45x^8 + 36x^7 + 28x^6 + 21x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$