

Zobrazení

... popisuje situaci, kdy jsou prvkům jedné množiny jednoznačně přiřazeny prvky z (jiné nebo i stejné) množiny.

Ukázky

- ▶ vztah rodičovství, kdy dítěti d je přiřazena jeho matka m ,
- ▶ ve městě m je zvolen starosta s ,
- ▶ z českého slova s je vybráno první písmeno p ,
- ▶ u slova s určíme počet samohlásek h ,
- ▶ síťovému rozhraní r (počítače) je přiřazena IP adresa a ,
- ▶ z reálného čísla x spočítáme hodnotu $x^2 - 2x$.

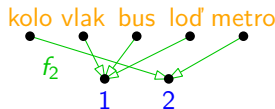
Definice: *Zobrazení* f z množiny X do množiny Y je množina dvojic (x, y) taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ v této množině. Namísto dvojice (x, y) píšeme $y = f(x)$ a říkáme, že y je *obrazem* x . Zobrazení f z X do Y značíme $f: X \rightarrow Y$.

Pro zobrazení používáme malá písmena f, g apod.

Ukázky zobrazení

Definice: *Zobrazení* f z množiny X do množiny Y je množina dvojic (x, y) taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ v této množině. Namísto dvojice (x, y) píšeme $y = f(x)$ a říkáme, že y je *obrazem* x . Zobrazení f z X do Y značíme $f: X \rightarrow Y$.

- ▶ Pro množiny $S = \{\text{kolo, vlak, bus, lod', metro}\}$, $P = \{a, \dots, z\}$ je množina $\{(\text{kolo}, k), (\text{vlak}, v), (\text{bus}, b), (\text{lod'}, l), (\text{metro}, m)\}$ zobrazení $f_1: S \rightarrow P$. Zde f_1 přiřazuje slovu první písmeno.
- ▶ Zobrazení $f_2: S \rightarrow \{1, 2\}$ dané $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{bus}) = f_2(\text{lod'}) = 1$ a $f_2(\text{kolo}) = f_2(\text{metro}) = 2$ přiřazuje slovu počet jeho samohlásek.



Zobrazení je zakresleno *grafem* — dvojice odpovídají šipkám.

- ▶ Zobrazení $f_3: P \rightarrow \{97, \dots, 122\}$, které vrátí u malého písmene bez diakritiky jeho ASCII kód v desítkové soustavě.
- ▶ Reálná funkce daná $f_4(x) = x^3 - 4x$ je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
- ▶ Na každé množině máme *identické zobrazení* $\text{id}: X \rightarrow X$, neboli *identitu*, danou předpisem $\text{id}(x) = x$; lze psát i id_X .

Přiřazení více prvků

Lze zobrazením přiřadit „více prvků naráz“, např. rodiči jeho děti?
Potřebujeme, aby cílová množina obsahovala *množiny prvků*.

Definice: Množinu všech podmnožin množiny X (včetně prázdné) nazveme *potenční množinou* množiny X a značíme ji $\mathcal{P}(X)$.

Ukázka: Pro $X = \{1, 2\}$ máme $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Pokud potřebujeme prvkům z X přiřadit více prvků z Y , použijeme zobrazení $X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ (nikoli „jen“ $X \rightarrow Y$).

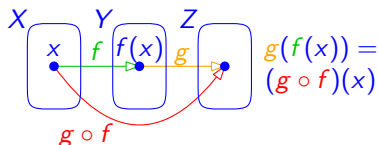
Ukázky: Máme-li na množině slov S přiřadit každému slovu jeho písmena, použijeme zobrazení $f_5: S \rightarrow \mathcal{P}(\{a, \dots, z\})$, např.
 $f_5(\text{kolo}) = \{k, l, o\}$, čili slovu přiřadíme *množinu* jeho písmen.

Podobně zobrazení, které kladnému přirozenému číslu x přiřadí množinu jeho dělitelů, je zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Skládání zobrazení

Značení: Pro zobrazení $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ se **složené zobrazení** značí $g \circ f: X \rightarrow Z$.

Pak platí: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

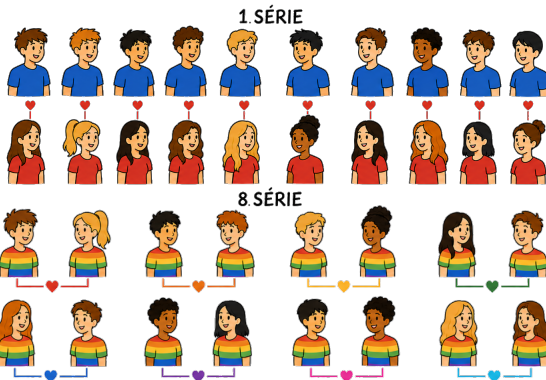


Ukázky: Pro $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = \sin(x)$,
dostáváme: $(g \circ f)(x) = (\sin \circ \exp)(x) = \sin(\exp(x))$,
 $(f \circ g)(x) = (\exp \circ \sin)(x) = \exp(\sin(x))$.

Pro f_1 , které slovu přiřadí první písmeno, a f_3 , které u písmene vrátí jeho ASCII kód, je $f_3 \circ f_1$ zobrazení, které vrácí ASCII kód prvního písmene slova, např. $(f_3 \circ f_1)(\text{kolo}) = f_3(f_1(\text{kolo})) = f_3(k) = 107$.

Obrácené složení $f_1 \circ f_3$ nemá smysl, protože f_1 je definováno na množině slov S , a nikoli na množině ASCII kódů, t.j. čísel.

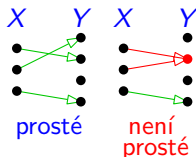
Lze se na párování dívat jako na zobrazení?



Každému účastníku hry můžeme přiřadit jeho „optimální“ protějšek na množině všech účastníků (v 8. sérii to asi lépe nejde). V 1. sérii je ale také možné vzít zobrazení z množiny dívek D do množiny kluků K , nebo naopak: klukům přiřadit dívky. Pozor, jde o různá zobrazení! První je $D \rightarrow K$, druhé $K \rightarrow D$. Aby odpovídaly o párování, musí mít tato zobrazení další vlastnosti.

Prosté zobrazení a zobrazení na

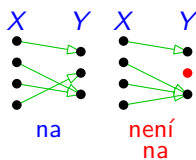
Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je **prosté**, pokud se obrazy různých prvků liší, formálně $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. V grafu prostého zobrazení do Y vede do každého prvku Y nejvýše jedna šipka.



Ukázky: Zobrazení f_1 je prosté, protože všechna slova v S začínají různými písmeny. Naopak, f_2 prosté není, protože např. slova **vlak** a **lod'** mají stejný počet samohlásek, neboli $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{lod'}) = 1$.

Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je **na**, pokud je každý prvek Y obrazem alespoň jednoho prvku z X , formálně $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

V grafu zobrazení na Y vede do každého prvku Y alespoň jedna šipka.



Ukázky: Zobrazení f_1 není na, např. protože žádné slovo z množiny S nezačíná písmenem **a**. Naopak, f_2 je na, protože v množině S jsou slova s jednou (**lod'**) i se dvěma samohláskami (**kolo**).

Bijekce a permutace

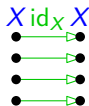
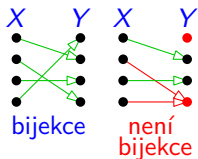
Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$, které je zároveň prosté i na, se nazývá *bijekce*, též vzájemně jednoznačné zobrazení. V grafu bijekce mezi X a Y vede do každého prvku Y *právě jedna* šipka.

Permutace množiny X je bijekce $X \rightarrow X$.

Ukázky: Zobrazení $D \rightarrow K$ odpovídající párování je bijekce.

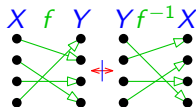
Zobrazení f_3 je bijekce, protože písmena z P mají různé kódy, a každé číslo $\{97, \dots, 122\}$ je kódem písmene z P .

Na každé množině X je identita id_X bijekcí i permutací.



Inverzní zobrazení

Pozorování: Pokud je $f: X \rightarrow Y$ bijekce, potom množina dvojic $\{(y, x): y = f(x)\}$ odpovídá zobrazení, které je také bijekcí.



Definice: Pro bijekci $f: X \rightarrow Y$ definujeme *inverzní zobrazení* k f jako zobrazení $f^{-1}: Y \rightarrow X$, předpisem: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Jinými slovy, f^{-1} pouze obrací pořadí prvků ve dvojicích:

$$f = \{(x, y): y = f(x)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(y, x): y = f(x)\}.$$

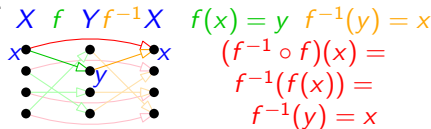
Graf inverzního zobrazení získáme otočením směru šipek.

Ukázka: Inverzní zobrazení k f_3 je zobrazení f_3^{-1} , které ASCII kódu z množiny $\{97, \dots, 122\}$ přiřadí odpovídající písmeno z P .

Pozorování: Pro bijekci $f: X \rightarrow Y$ a každé $x \in X$, $y \in Y$ platí: $f^{-1}(f(x)) = x$ a $f(f^{-1}(y)) = y$.

Stručněji a formálněji:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

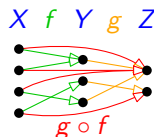
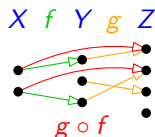


Tvrzení o zobrazeních

Pozorování:

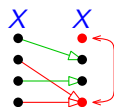
Složení prostých zobrazení je prosté.

Složení zobrazení na je na.



Pozorování:

Pro zobrazení $f: X \rightarrow X$ na *konečné* množině X platí: f je prosté, právě když je na.



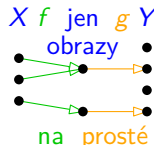
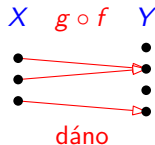
Do X vchází tolik šipek, kolik má X prvků. Buď nastanou obě situace najednou, nebo ani jedna.

Pozor! toto pozorování neplatí pro nekonečné množiny:

Zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dané $f(x) = x + 1$ je prosté, ale není na!

Pozorování:

Každé zobrazení lze zapsat jako složení $g \circ f$, kde f je zobrazení na a g je prosté.



Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Složení zobrazení (funkcí) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ je
 - a) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ a $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$,
 - b) $(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$ a $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$,
 - c) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$,
 - d) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = (\sin x)^2$.
2. Reálná funkce $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná $f_4(x) = x^3 - 4x$
 - a) je prostá, ale není na, b) je na, ale není prostá,
 - c) protože je na, musí být i prostá.
3. Každé zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi konečnými $|X| < |Y|$
 - a) je na, b) není na, c) je prosté, d) není prosté.
4. Pravda nebo lež? Pro každou permutaci f na libovolné množině X a každé $a, b \in \mathbb{Z}$ platí: $f^a \circ f^b = f^{a+b}$.
(Kladný exponent odpovídá opakovanému skládání f :
 $f^a = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{a \times}$; záporný opakovanému skládání f^{-1} :
 $f^{-a} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{a \times}; f^0 = \text{id}_X.$)

Komentář k řešení kvízu

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$.
- Není prostá, protože např. $f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$,
 $f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 = 0$. Polynomy lichého stupně jsou na
(jsou spojité a mají různé nevlastní limity v $\pm\infty$).
- b) Není na, protože každé f najdeme prvek Y ,
který není obrazem žádného prvku X , což také vylučuje a).
c,d) např. $x \rightarrow |x|$ na $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$.
- Idea: Pro nezáporné exponenty plyne z asociativity (i pro
každé zobrazení). Záporné exponenty mají smysl jen u bijekcí.
Oba záporné: asociativita pro f^{-1} . Různá znaménka: např.
 $a < 0 < b$, tak se $\min\{|a|, b\}$ -krát $f^{-1} \circ f$ složí na identitu:
$$f^a \circ f^b = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{|a| \times} \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{b \times} = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{(|a|-1) \times} \circ f^{-1} \circ f \circ$$
$$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{(b-1) \times} = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{(|a|-1) \times} \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{(b-1) \times} = f^{|a|-1} \circ f^{b-1} = \dots$$

Poznámky k pojmosloví a značení

Pojem *funkce* se někdy bere za synonymum pro zobrazení.

Často jsou funkce zobrazení mezi číselnými obory, např. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
a bývají zadány nějakým předpisem, např. $f(x) = x \sin(x)$.

Potenční množina množiny X se někdy značí 2^X .

Pro mohutnost potenční množiny totiž platí: $|\mathcal{P}(X)| = |2^X| = 2^{|X|}$.

Prostá zobrazení se také nazývají *injektivní*,
zobrazení na se nazývají *surjektivní*.