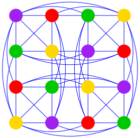
# Barvení grafů

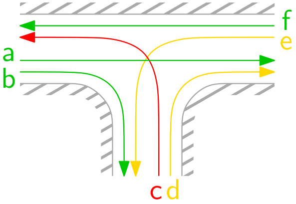
. . . barvení vrcholů tak, že sousední vrcholy mají různé barvy.

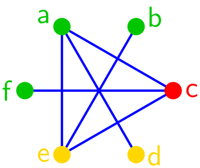
Aplikace například v:

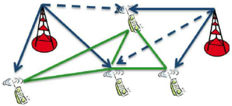
- rozvrhování, dopravě
- redukci interference
- rekreační matematice, sudoku . . .

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |





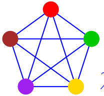



# Barevnost grafu

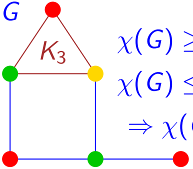
Definice: *Obarvení* grafu $G$ pomocí $k$ barev je zobrazení $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ takové, že $(u, v) \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

*Barevnost* grafu $G$ je nejmenší $k$, pro nějž má $G$ obarvení $k$ barvami. Značí se $\chi(G)$.



$\chi(K_5) = 5$

Ukázka:



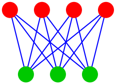

$\chi(G) \geq \chi(K_3) = 3$

$\chi(G) \leq 3$

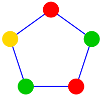
$\Rightarrow \chi(G) = 3$

Pozorování:

- $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_{m,n}) = 2$.
- Pokud je $H$ podgrafem $G$, potom $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- $\chi(G) \leq 1 \Leftrightarrow G$ nemá hrany.
- $\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ je bipartitní.
- $\chi(C_{2k}) = 2$, $\chi(C_{2k+1}) = 3$.



$\chi(K_{4,3}) = 2$

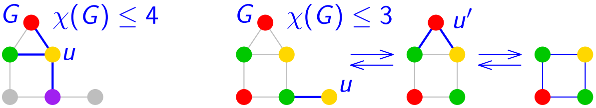


$\chi(C_5) = 3$

# Meze na barevnost pomocí stupňů vrcholů

Pozorování: Pokud má graf $G$ *všechny vrcholy* stupně nejvýše $d$, potom lze $G$ obarvit $d+1$ barvami.

… vrcholy barvíme v *libovolném* pořadí. V každém kroku má právě obarvovaný vrchol $u$ nejvýše $d$ obarvených sousedů. I kdyby měli všichni sousedé $u$ různé barvy, alespoň jedna barva pro $u$ zbývá.



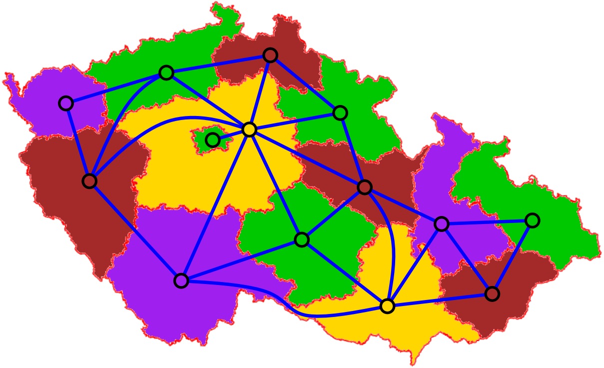

Věta: Pokud má *každý podgraf* grafu $G$ *alespoň jeden* vrchol stupně nejvýše $d$, potom lze $G$ obarvit $d+1$ barvami.

Důkaz: Indukcí podle počtu vrcholů. *Zvolíme* $u$ stupně nejvýše $d$. Podgrafy grafu $G \setminus u$ jsou i podgrafy grafu $G$. Čili pro $G \setminus u$ platí indukční předpoklad a lze jej obarvit $d+1$ barvami.
Dále stejně jako v pozorování: „I kdyby měli všichni sousedé $u$ různé barvy, alespoň jedna barva pro $u$ zbývá.“

# Věta o čtyřech barvách

Motivace: Barvení politických map, tak že sousední regiony (státy, kraje) mají různé barvy.

Ukázka:



Věta: Každý rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami.

# Slabší verze věty

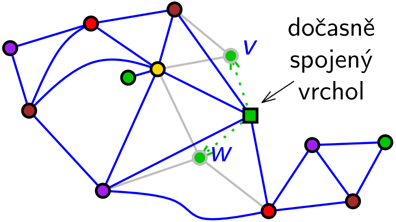
Pozorování: Každý rovinný graf má vrchol stupně nejvýše 5.

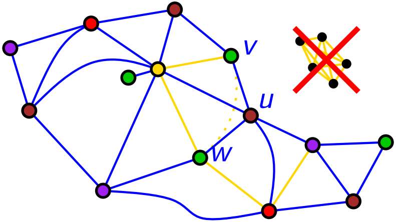
… jinak by měl víc hran, než je možné: $|E| \geq \frac{6}{2}|V| > 3|V| - 6$

Důsledek: Každý rovinný graf lze obarvit šesti barvami.

Věta: Každý rovinný graf lze obarvit pěti barvami.

Důkaz: Stačí jen ošetřit případ, kdy zvolený vrchol $u$ má stupeň 5. Vrchol $u$ má dva sousedy $v$, $w$ netvořící hranu, jinak by $G$ měl $K_5$ a nebyl rovinný. Odebereme $u$. Spojíme $v$ a $w$ do jednoho vrcholu. Tento menší rovinný graf obarvíme podle indukčního předpokladu. Po zpětném oddělení $v$ a $w$ jsou na sousedech $u$ použité nanejvýš čtyři různé barvy, a tak „…alespoň jedna barva pro $u$ zbývá.“

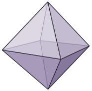


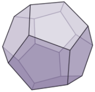
# Kvíz

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež?
   Pouze úplné grafy mají barevnost rovnu počtu vrcholů.
2. Jaká je barevnost grafu osmistěnu?
   a) 2, b) 3, c) 4, d) 6, e) 8.



3. Pravda nebo lež?
   Graf má barevnost 4, právě když obsahuje $K_4$ jako podgraf.
4. Kolik nejméně barev je třeba k obarvení stěn dvanáctistěnu, aby sousední stěny měly různé barvy?
   a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6, f) 10, g) 12.



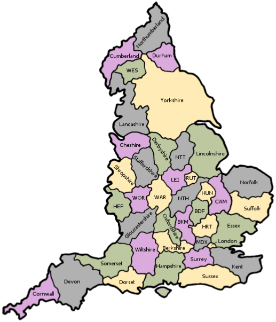
5. Jaký nejmenší počet hran musí mít graf na 20 vrcholech, aby mohl mít barevnost alespoň 6?
   a) 5, b) 10, c) 15, d) 20, e) 30, f) 60, g) 120.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Platí, že graf je bipartitní, právě když nemá žádný lichý cyklus jako podgraf?
- Existují grafy, v nichž je nejnižší stupeň vrcholu roven $5$? Kolik takových vrcholů pak může být?
- Které grafové operaci odpovídá slučování vrcholů v důkazu věty o pěti barvách? Proč tato operace zachovává rovinnost?

# Poznámky k historii problému čtyř barev

V 1852 F. Guthrie zpozoroval, že *čtyři* barvy stačí pro obarvení mapy anglických hrabství a vyslovil domněnku, že tento počet postačí i pro obarvení libovolné politické mapy.




Francis Guthrie
1831 – 1899

Větu dokázali K. Appel a W. Haken až roku 1976 pomocí počítače.