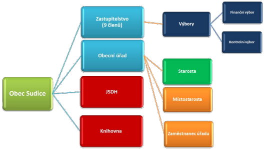
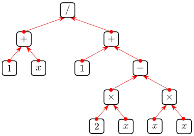
Stromy

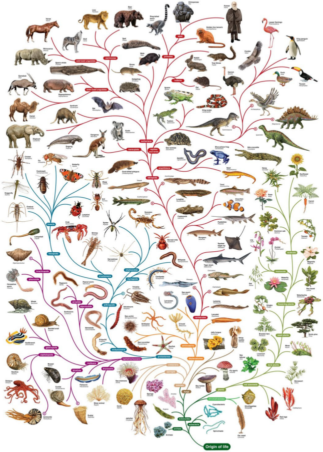
… grafy obvykle vyjadřující nějakou hierarchii, například:

- evoluční (fylogenetický) nebo genealogický strom
- hierarchie organizace, společnosti, systému
- syntaktický strom, např. pro výpočet matematického výrazu



$$\frac{1+x}{1+2x-x^2}$$





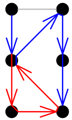
Tyto grafy jsou souvislé a nemají cykly (pomineme-li orientace, pořadí, apod.).

Stromy a jejich vlastnosti

Definice: Strom je souvislý graf bez kružnic.

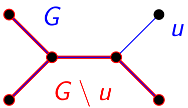
... prázdné grafy bez vrcholů, t.j. $(\emptyset, \emptyset)$ v této lekci neuvažujeme.

Pozorování: Má-li graf všechny vrcholy stupně alespoň 2, pak obsahuje libovolně dlouhý sled, v němž jsou po sobě jdoucí hrany různé. Je-li G konečný, vrcholy se zopakují. Nejkratší úsek mezi zopakováním vrcholu určuje kružnici.



Obrácené tvrzení dává bezprostředně:

Důsledek: Každý konečný strom na alespoň dvou vrcholech má vrchol stupně 1, zvaný *list*.



Pozorování: Je-li $u \in V_G$ vrchol stupně 1, pak G je strom, *právě když* $G \setminus u$ je strom.

... odebrání či přidání u zachová souvislost ani nevytvoří kružnici.

Ekvivalentní charakterizace stromů

Věta: Pro každý graf G jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. G je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
2. každé dva vrcholy G spojuje právě jedna cesta;
3. G je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;
4. G je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;

Pro konečné grafy je navíc ekvivalentní i podmínka:

5. G je souvislý a splňuje $|E| = |V| - 1$.

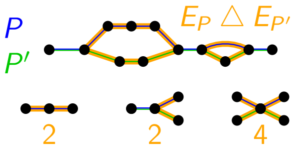
... ukážeme posloupnost implikací 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 1.
a zvlášť ekvivalenci 1. $\Leftrightarrow$ 5.

Ekvivalence podmínek, krok 1. $\Rightarrow$ 2.

1. G je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
2. každé dva vrcholy G spojuje právě jedna cesta;

Souvislost G udává, že každé dva vrcholy spojuje *alespoň* 1 cesta.

Jsou-li dva vrcholy spojeny různými konečnými cestami P a P', pak hrany, které se vyskytují jen v jedné z těchto cest (čili tzv. symetrický rozdíl množin E_P a $E_{P'}$) tvoří konečný podgraf, v němž jsou všechny stupně alespoň 2. Tento podgraf obsahuje kružnici.

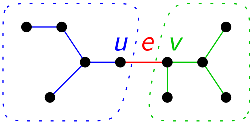


Ekvivalence podmínek, krok 2. $\Rightarrow$ 3.

2. každé dva vrcholy G spojuje právě jedna cesta;
3. G je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;

Existence ≥ 1 cesty mezi libovolnými vrcholy dává souvislost.

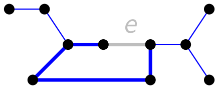
Je-li $e = (u, v) \in E$, tvoří tato hrana e jedinou cestu z u do v.
Po jejím odebrání zůstanou u a v v různých komponentách, protože už je nespojuje žádná jiná cesta.



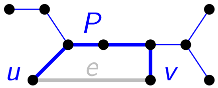
Ekvivalence podmínek, krok 3. $\Rightarrow$ 4.

3. G je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;
4. G je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;

Kdyby G obsahoval kružnici, potom odebráním libovolné hrany e z této kružnice by zůstal souvislý.



V souvislém grafu je mezi každými dvěma vrcholy u a v cesta P. Pokud $(u, v) \notin E$, pak přidáním e do G vznikne kružnice $P \cup e$.



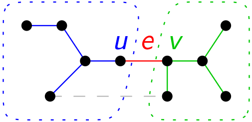
Ekvivalence podmínek, krok 4. $\Rightarrow$ 1.

4. G je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;
1. G je strom, neboli souvislý a bez kružnic;

Podmínka, že G je bez kružnic, je přímo předpokládána.

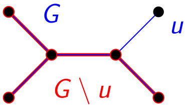
Souvislost G ukážeme pomocí obráceného tvrzení.

Kdyby G nebyl souvislý, zvolíme vrcholy u a v z různých komponent. Přidáním hrany (u, v) nevznikne kružnice, protože kdyby vznikla, byly by u a v ve stejné komponentě.



Ekvivalence podmínek, krok 1. $\Leftrightarrow$ 5.

1. G je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
5. G je souvislý a splňuje $|E_G| = |V_G| - 1$.



Podmínka, že G je souvislý, je na obou stranách.

Důkaz zbývající ekvivalence indukcí podle počtu vrcholů.

I. Strom o jednom vrcholu splňuje: $|E_G| = 0 = 1 - 1 = |V_G| - 1$.

II. Strom G na ≥ 2 vrcholech má list u. Graf $G \setminus u$ je strom s méně vrcholy. Pro něj platí indukční předpoklad: $|E_{G\setminus u}| = |V_{G\setminus u}| - 1$. Protože $|E_{G\setminus u}| = |E_G| - 1$ a $|V_{G\setminus u}| = |V_G| - 1$, plyne dosazením: $|E_G| = |E_{G\setminus u}| + 1 = |V_{G\setminus u}| - 1 + 1 = |V_G| - 1$

Obráceně, G nemá vrcholy stupně 0, protože by nebyl souvislý a ani nemůže mít všechny vrcholy stupně alespoň 2, protože pak by $|E_G| \geq |V_G|$. Tudíž G má vrchol u stupně 1. Nyní $|E_G| = |V_G| - 1$ $\Rightarrow |E_{G\setminus u}| = |V_{G\setminus u}| - 1 \Rightarrow G \setminus u$ je strom $\Rightarrow G$ je strom.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je neizomorfních stromů na čtyřech vrcholech?
   a) 2, b) 4, c) 8, d) 16, d) 32.
2. Má-li graf G celkem 10 vrcholů a 15 hran, potom
   a) G není strom, b) G je nesouvislý, c) G obsahuje kružnici,
   d) G nemá list, e) má stupně všech vrcholů alespoň 2.
3. Pravda nebo lež? Konečný graf je strom, právě když
   $|E| = |V| - 1$ a přidáním libovolné hrany vznikne kružnice.
4. Kolik kružnic může vzniknout přidáním tří hran do stromu?
   a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 7.
5. Pravda nebo lež? Každá posloupnost $d_1, \ldots, d_n$ kladných celých čísel se součtem $2n - 2$, jednoznačně určuje strom, v němž pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že v_i má stupeň d_i.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je každý strom bipartitní?
- Platí, že každý konečný graf má alespoň dva listy?
- Je požadavek konečnosti nezbytný?
- Co by muselo být splněno, aby listy byly alespoň tři?
- Které další kombinace podmínek z věty o ekvivalentních definicích stromu definují strom a které nikoli?

Poznámky k pojmosloví a značení

Graf bez kružnic se nazývá *les*.
Platí tedy, že souvislý les je strom.
Pojem strom pochází také od J. J. Sylvestera.

Podgraf na všech vrcholech, který je stromem se nazývá *kostra*, angl. *spanning tree*.

Pro hierarchické struktury se používají stromy s orientovanými hranami, přičemž hrany jsou orientovány směrem ke *kořeni* stromu, (též mohou být všechny orientovány obráceně, t.j. od kořene).

Pro relaci znamenající „u leží na cestě mezi v a kořenem“ se používá termín u je *předek* v. Podobně se definují *potomci*; u bezprostředně sousedících vrcholů pak relace *rodič/dítě*; u vrcholů se společným rodičem *sourozenci* apod.