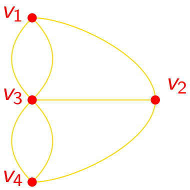
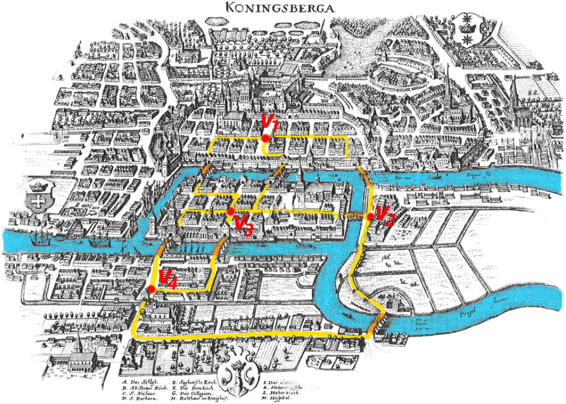
# Eulerovské grafy

. . . jednotažky, čili grafy, které lze nakreslit jedním tahem.

- Královecké mosty



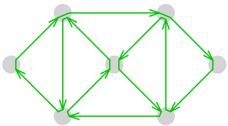




- aplikace v plánování cest, kdy je třeba projet všechny *hrany*, např. plánování zimní údržby silnic, úklidu budov, ostrahy. . .
- rekonstrukce posloupnosti DNA z jejích fragmentů

# Eulerovský tah

Definice: Tah, co začíná i končí ve stejném vrcholu, je *uzavřený*.
Tah, který obsahuje všechny hrany, se nazývá *eulerovský*.

Ukázka:



Pozorování: Má-li graf uzavřený eulerovský tah:

- musí být až na izolované vrcholy souvislý, protože hrany tahu určují souvislý podgraf,
- musí mít všechny stupně sudé, protože každý průchod vrcholem zvýší stupeň o 2.

Tyto dvě nutné podmínky jsou i postačující:

Věta: Graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah, *právě když* je souvislý a zároveň má stupně všech vrcholů sudé.

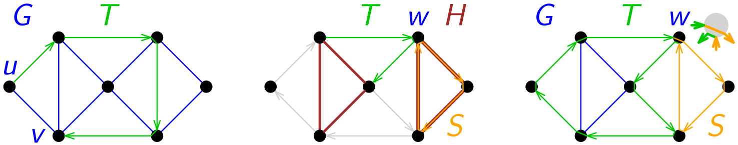
Poznámka: Pokud není třeba, aby měl graf uzavřený eulerovský tah, ale „jen“ eulerovský tah, smí mít dva vrcholy lichého stupně. V jednom z nich eulerovský tah začne a ve druhém skončí.

# Nalezení uzavřeného eulerovského tahu v grafu $G$

- Z libovolného vrcholu $u$ vedeme co nejdelší tah $T$.
- Tah prodlužujeme o nové hrany, dokud je to možné, což lze v každém $v$ různém od $u$. Průchody skrz $v$ nezmění paritu počtu volných hran, ale příchod do $v$ v posledním kroku ji změní ze sudé na lichou, čili ve $v$ zbývá alespoň $1$ volná hrana.

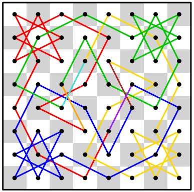
... nelze-li tah $T$ prodloužit, končí v $u$, neboli $T$ je uzavřený.

- Pokud $T$ není eulerovský, určují zbývající hrany neprázdný podgraf $H$ grafu $G$. Tento podgraf $H$ nemusí být souvislý, ale má sudé stupně. Plyne z parity rozdílu, v $T$ jsou sudé stupně.
- Díky souvislosti $G$ je na $T$ vrchol $w$ s *kladným* stupněm v $H$.
- Stejným způsobem nalezneme v $H$ uzavřený tah $S$ z $w$ do $w$.
- Tah $T$ prodloužíme tím, že na místě vrcholu $w$ vložíme tah $S$.
- Opakujeme tak dlouho, dokud nepoužijeme všechny hrany $G$.

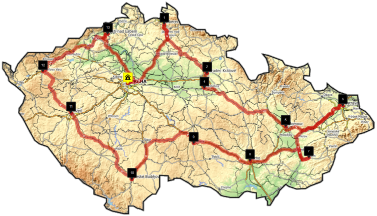


# Hamiltonovské grafy

Problém šachového jezdce:
Lze šachovým jezdcem projít šachovnicí tak, že každé pole navštívíme jen jednou? Případně, lze se takto vrátit na výchozí pole?



Definice: *Hamiltonovská kružnice* v grafu $G$ je jeho podgraf, který je izomorfní kružnici a přitom obsahuje všechny *vrcholy* $G$.



… aplikace v plánování cest, kdy je třeba navštívit předepsané lokality.

*„Problém obchodního cestujícího“*

K zapamatování: Narozdíl od nalezení eulerovského tahu je určení hamiltonovské kružnice výpočetně těžká úloha (NP-úplná).

# Kvíz — řešení

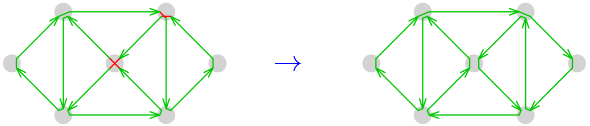
Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež? Odebereme-li libovolnou hranu ze souvislého grafu s uzavřeným eulerovským tahem, pak zůstane souvislý.
2. Které sady dominových kamenů lze uspořádat do řady tak, aby čísla na dotýkajících se polovinách byla stejná?
   a) původní asijskou sadu s 1 až 6 oky na každé polovině,
   b) klasickou evropskou sadu s 0 až 6 oky,
   c) sadu s 0 až 9 oky, d) sadu s 0 až 12 oky.

3. Je dán prostý graf na 20 vrcholech s 5 komponentami, který má všechny stupně vrcholů liché. Kolik hran je k němu možné přidat, aby měl eulerovský tah a přitom zůstal prostý?
   a) 4, b) 5, c) 9, d) 10, e) 15, f) 20, g) 25, h) 100, i) 200.
4. Pravda nebo lež?
   I na čtvercové šachovnici lichého rozměru může šachový jezdec projít všechna pole a vrátit se tam, kde začal.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Které grafové operace zachovávají existenci uzavřeného eulerovského tahu? Uvažte přidání/odebrání vrcholů a hran, sjednocení/rozdíl grafů, resp. jejich množin vrcholů a hran...
- Jaké vlastnosti musejí mít grafy, které lze nakreslit jedním orientovaným tahem a které mají všechny hrany orientované?
- A co kdyby byly jen některé hrany orientované?
- Pokud lze graf s eulerovským tahem nakreslit bez křížení hran, lze pak nalézt tah takový, že se nekříží ani ve vrcholech?



# Poznámky k pojmosloví a historii

Souvislé grafy s eulerovským tahem se nazývají *eulerovské* na počest švýcarského matematika L. Eulera, který v roce 1736 vyřešil problém královeckých mostů.

Jde o jeden z prvních poznatků teorie grafů, jak je s mírnou nadsázkou a velkým respektem zpíváno v její hymně.

Leonhard Euler
1707 – 1783