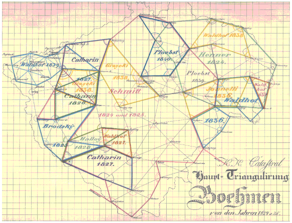
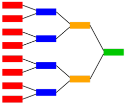
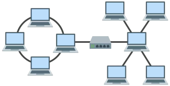
Grafy

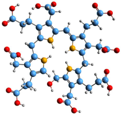
. . . znázorňují symetrické vztahy mezi různými dvojicemi prvků

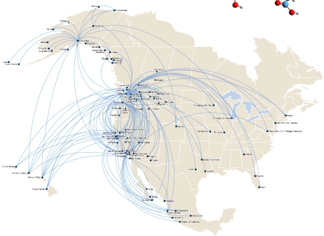
- zdali jsou místa spojena cestou — dopravní síť
- viditelnost v triangulační síti
- zdali se osoby znají — sociální sítě
- komunikační sítě mezi počítači
- struktura molekul
- vyřazovací schéma turnaje

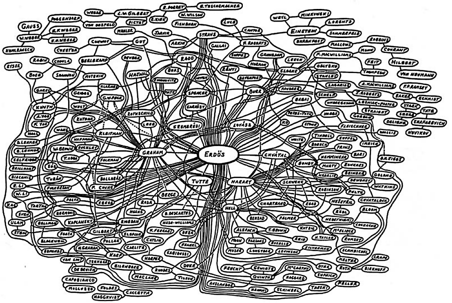






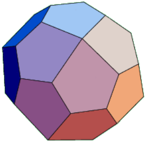






Grafy

Terminologie vychází z mnohostěnů:



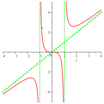
Graf se značí $G = (V, E)$.

Prvky množniny V se nazývají *vrcholy*.
Značí se obvykle u, v apod.

Množina E obsahuje vybrané dvojice vrcholů neboli tzv. *hrany*.
Píšeme $E \subseteq \binom{V}{2}$. Symbol $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvojic.
Hrany se značí $e = (u, v)$, ale jde o *neuspořádané* dvojice!
Vrcholy tvořící hranu se nazývají *sousední*.

(Grafy obecných relací mohou mít hrany orientované a smyčky.)

Pozor na podobně nazvané, ale principiálně jiné objekty:



~~Graf funkce~~

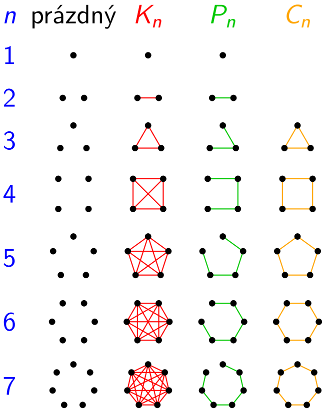
~~Statistický či finanční graf~~

Vybrané typy grafů

Prázdný graf je graf bez hran.
Úplný graf obsahuje všechny možné dvojice na množině vrcholů.
Cesta má seřazené vrcholy a sousedí jen po sobě jdoucí dvojice.
Kružnici neboli *cyklus* získáme z cesty spojením krajních vrcholů.

Formálně, pro $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$:

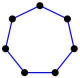
- prázdný graf je $(V_n, \emptyset)$,
- úplný graf je $K_n = \left(V_n, \binom{V_n}{2}\right)$,
- cesta P_n má hrany
  $E_{P_n} = \{(v_i, v_{i+1}) :$
  $i \in \{1, \dots, n-1\}\}$,
- cyklus C_n pro $n \geq 3$ má hrany
  $E_{C_n} = E_{P_n} \cup \{(v_1, v_n)\}$.

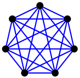


Stupně

Stupeň vrcholu v je roven počtu hran, kterým v náleží.
Formálně: $\deg(v) = |\{e\colon v \in e\}|$

Regulární graf má všechny stupně stejné.
Např. každá kružnice je 2-regulární graf a
úplný graf K_n je $(n-1)$-regulární.

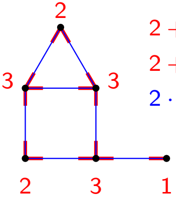
C_7  2-regulární

K_7  6-regulární

Pozorování: Součet všech stupňů je roven dvojnásobku počtu hran.

Formálně: $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ ... tzv. *princip sudosti*.

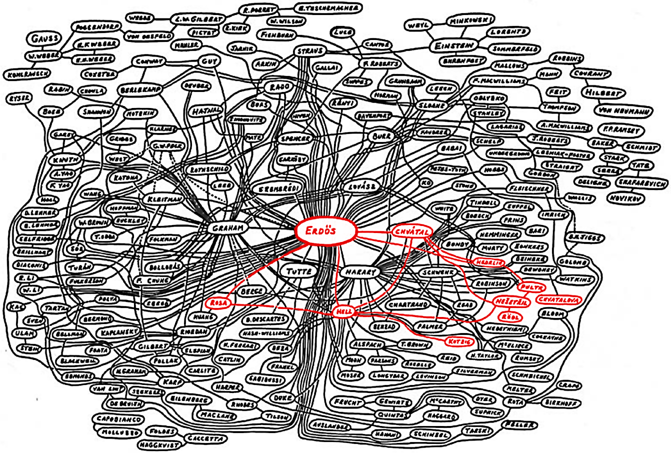
Důkaz:
Každá hrana má dva konce
a každý takový konec je započten
ve stupni jen u jednoho vrcholu.



$2+3+3+$
$2+3+1=$
$2 \cdot 7 = 14$

Podgrafy

... situace kdy cheme popsat je část vztahů,
čili se zaměříme jen na některé vrcholy a některé hrany.
Ukázka: P. Erdős a českoslovenští matematici v Erdősově grafu:



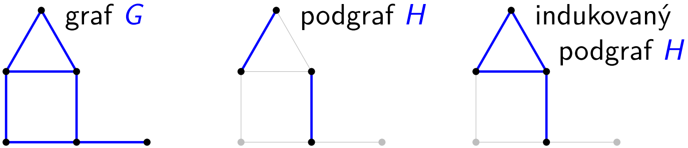
Podgrafy

... situace kdy cheme popsat je část vztahů,
čili se zaměříme jen na některé vrcholy a některé hrany.

Definice: Graf $H = (V_H, E_H)$ je *podgrafem* grafu $G = (V_G, E_G)$,
pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Graf H je navíc podgrafem *indukovaným* množinou V_H,
pokud u hran platí rovnost namísto inkluze, čili $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Ukázka:



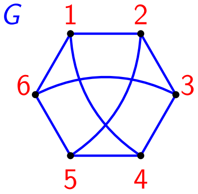
Indukovaný podgraf obsahuje všechny hrany grafu G,
které mají oba konce ve zvolené množině V_H.

Isomorfismus grafů

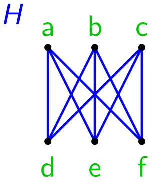
... popisuje vztah mezi dvěma grafy,
které se liší jen názvy vrchlolů, ale jinak mají stejnou strukturu.

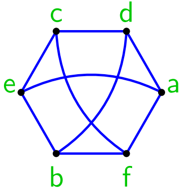
Definice: Graf G je *isomorfní* grafu H pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon V_G \to V_H$ splňující:
$\forall u, v \in V_G\colon (u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Ukázka:



u	$f(u)$
1	c
2	d
3	a
4	f
5	b
6	e





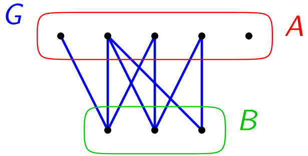
Pozorování: Relace „být isomorfní“ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, jde o ekvivalenci. Její třídy ekvivalence jsou obvykle vnímány jako odlišné grafy s nepojmenovanými vrcholy.

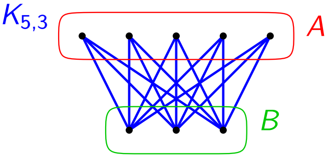
Bipartitní grafy

... grafy, v nichž hrany vedou jen mezi dvěma skupinami vrcholů

Definice: Graf G se nazývá *bipartitní*, jde-li V_G rozdělit na dvě disjunktní množiny A a B, přičemž každá hrana vede mezi nimi.

Ukázka:





Definice: *Úplný bipartitní* graf $K_{m,n}$ je takový bipartitní graf, který má všechny hrany mezi množinami A velikosti m a B velikosti n.

Pozorování: Každý bipartitní graf je podgrafem nějakého úplného bipartitního podgrafu.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Každý bipartitní graf na 10 vrcholech je podgrafem nějakého
   a) $K_{5,5}$, b) $K_{5,9}$, c) $K_{5,10}$, d) $K_{1,10}$, e) $K_{1,9}$.
2. Pravda nebo lež?
   Pokud jsou si dva grafy G a H isomorfní, potom každý podgraf G je isomorfní nějakému podgrafu H.
3. Pravda nebo lež?
   Každý 2-regulární graf je isomorfní nějaké kružnici.
4. Kolik vrcholů má nejmenší 5-regulární graf, který není isomorfní K_6?
   a) žádný takový graf neexistuje, b) 7, c) 8, d) 9, e) 10.
5. Pravda nebo lež? Každý regulární bipartitní graf má obě části A a B stejně velké.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Kolik hran má úplný graf K_n a kolik úplný bipartitní $K_{m,n}$?
- Které cesty a které kružnice jsou izomorfní úplným grafům, resp. úplným bipartitním grafům?
- Kolik má n-vrcholový graf indukovaných podgrafů?
- Pomocí jakých zobrazení lze definovat podgrafy a indukované podgrafy?

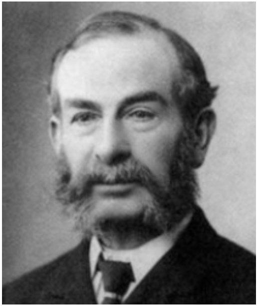
Poznámky k pojmosloví a značení

Vrcholy bývají někdy nazývány *uzly*.

Termín graf pochází od J. J. Sylvestera, který jej zavedl v roce 1878 jako synonymum pro Kekulého diagram struktury molekul.

Lze se setkat s definicí grafů, v nichž jsou hrany uspořádané dvojice. Tyto struktury se obvykle nazývají *orientované grafy*.

Zobecnění grafů v nichž jsou povoleny smyčky u vrcholů anebo násobné hrany, případně i půlhrany se nazývají *multigrafy*.



James Joseph Sylvester
1814 – 1897

Pro zdůraznění, že graf neobsahuje žádné smyčky, půlhrany ani násobné hrany se používá termín *prostý graf*.