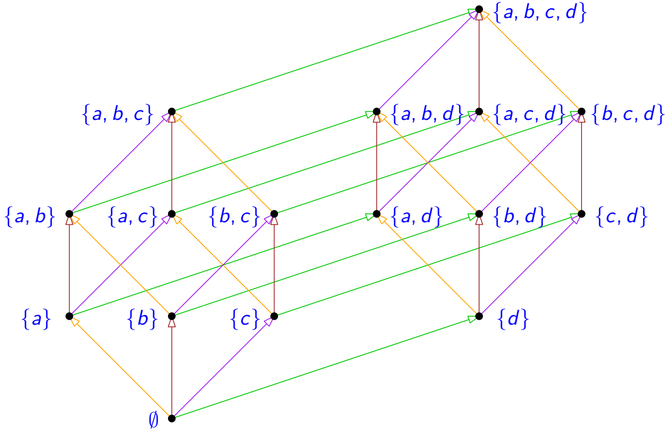
Počet podmnožin

Věta: Konečná množina X mohutnosti n,
má 2^n různých podmnožin, neboli $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.



Počet podmnožin

Věta: Konečná množina X mohutnosti n,
má 2^n různých podmnožin, neboli $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

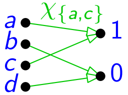
Důkaz 1: Indukcí podle n. Prázdná množina má 1 podmnožinu: $\emptyset$.

Indukční krok: Označme n-tý prvek symbolem x. Pak každou podmnožinu A na zbývajících $n-1$ prvcích lze buď ponechat nebo rozšířit na $A \cup x$. Počet možných podmnožin se vždy zdvojnásobí.

Definice: *Charakteristická funkce* podmnožiny A množiny X je zobrazení $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$ dané předpisem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

Ukázka:
pro $A = \{a, c\} \subseteq \{a, b, c, d\} = X$



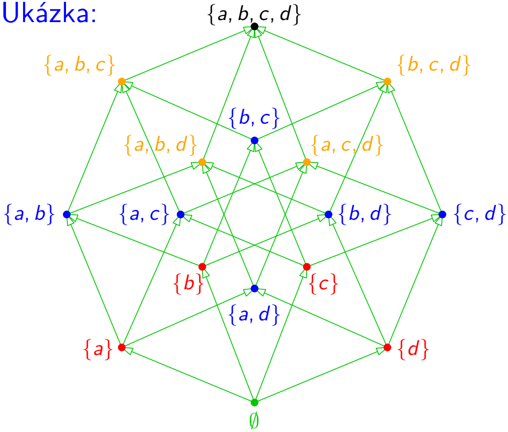
Důkaz 2: Každá charakteristická funkce χ_A jednoznačně určuje A.
Počet podmnožin je roven počtu charakteristických funkcí, čili 2^n.

Počet podmnožin dané velikosti

Věta: Pro každou n-prvkovou množinu X a $k \in \{0, \ldots, n\}$ platí, že X má $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ podmnožin velikosti k.

Definice: Číslo $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ je tzv. *binomický koeficient* a značí se $\binom{n}{k}$.

Ukázka:



$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{24}{6 \cdot 1} = 4$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1$$

Počet podmnožin dané velikosti

Věta: Pro každou n-prvkovou množinu X a $k \in \{0, \dots, n\}$ platí, že X má $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ podmnožin velikosti k.

Definice: Číslo $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ je tzv. *binomický koeficient* a značí se $\binom{n}{k}$.

Důkaz: Prvky podmnožiny uspořádáme jakkoli od prvního ke k-tému. Dostáváme prosté zobrazení z $\{1, \dots, k\}$ do X. (podmnožina tvoří množinu obrazů zobrazení). Možných zobrazení je $\frac{n!}{(n-k)!}$ a rozdílné množiny určují různá zobrazení (nikoli naopak).

Např. $\{a, c\}$ dává dvě zobrazení $1 \to a$, $2 \to c$ a $1 \to c$, $2 \to a$.

Podmnožina velikosti k má $k!$ různých uspořádání svých prvků, čili jedné podmnožině odpovídá $k!$ různých prostých zobrazení.

Počet podmnožin dané velikosti

Věta: Pro každou n-prvkovou množinu X a $k \in \{0, \dots, n\}$ platí, že X má $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ podmnožin velikosti k.

Definice: Číslo $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ je tzv. *binomický koeficient* a značí se $\binom{n}{k}$.

Binomická věta: Pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Důkaz: Rozepíšeme $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\times}$.

Člen x^k lze při roznásobení získat tak, že z k dvoučlenů $(1+x)$ zvolíme x a z ostatních $n-k$ dvoučlenů zvolíme 1. Koeficient $\binom{n}{k}$ je počet možností, kolikrát lze z n-prvkové množiny dvoučlenů vybrat k-prvkovou podmnožinu (tj. dvoučleny, z nichž volíme x).

Vlastnosti binomických koeficientů

Pascalův trojúhelník je uspořádání binomických koeficientů:

$$
\begin{array}{c}
1 = \binom{0}{0} \\
1 = \binom{1}{0} \; 1 = \binom{1}{1} \\
1 = \binom{2}{0} \; 2 = \binom{2}{1} \; 1 = \binom{2}{2} \\
1 = \binom{3}{0} \; 3 = \binom{3}{1} \; 3 = \binom{3}{2} \; 1 = \binom{3}{3} \\
1 = \binom{4}{0} \; 4 = \binom{4}{1} \; 6 = \binom{4}{2} \; 4 = \binom{4}{3} \; 1 = \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 + 1x \\
1 + 2x + 1x^2 \\
1 + 3x + 3x^2 + 1x^3 \\
1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4
\end{array}
$$

Pozorování:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ... každá množina má jednoznačný doplněk.
- $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ ... odpovídá počtu všech podmnožin.

  Alternativně, dosazením $x = 1$ do binomické věty.
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ ... viz výpočet v Pascalově trojúhelníku.

  Důkaz: Zvolíme jakékoli $x \in X$. Podmnožiny X o k prvcích lze rozdělit na $\binom{n-1}{k-1}$ podmnožin, co obsahují x, a na $\binom{n-1}{k}$ bez x.

Výběry s opakováním a bez opakování

Podobně znějící úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit mezi 5 dětí

- 3 třešně, každé může mít nejvýše jednu?
- 7 malin, čili některé jich dostane i víc než jednu?

První úloha odpovídá výběru tříprvkové podmnožiny dětí, tj. těch, které dostanou třešně. To lze provést $\binom{5}{3} = 10$ způsoby. Jiný pohled: počítáme rozklady $3 = a_1 + \cdots + a_5$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

Ve druhé rozkládáme $7 = a_1 + \cdots + a_5$ bez dalších podmínek. Každý rozklad, např. $0 + 4 + 1 + 0 + 2$ lze zapsat v unární soustavě, čili $+IIII+I++II$. Prázdná pozice na kraji a mezi dvěma sousedními $++$ odpovídají nulovému sčítanci.
Jde o řetězce délky 11 se sedmi symboly I a čtyřmi symboly $+$. Takových posloupností, a tedy i rozdělení malin je $\binom{11}{7} = 330$.

Důsledek: Počet výběrů k prvků z n-prvkové množiny je $\binom{n}{k}$ pro výběry *bez opakování*, a $\binom{n+k-1}{k}$ pro výběry *s opakováním*.

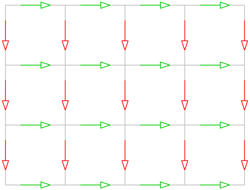
Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Čeho je nejvíce? a) permutací na pěti prvcích,
   b) tříprvkových podmnožin desetiprvkové množiny,
   c) charakteristických funkcí na šestiprvkové množině,
   d) prostých zobrazení z čtyřprvkové množiny do pětiprvkové.
2. Pravda nebo lež? Sedmiprvkových podmnožin desetiprvkové množiny je stejně jako tříprvkových a víc než šestiprvkových.
3. Součin charakteristických funkcí $\chi_A \chi_B$ definovaný po složkách vztahem $(\chi_A \chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$ je a) nulová funkce,
   b) $\chi_{A\cup B}$ (tj. ch. funkce sjednocení), c) $\chi_{A\cap B}$ (tj. průniku).
4. Pravda nebo lež? Součet čísel ve třech po sobě jdoucích řádcích Pascalova trojúhelníku je vždy dělitelný sedmi.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Kolik má konečná množina podmnožin sudé mohutnosti?
- Jak souvisí Pascalův trojúhelník s počtem nejkratších cest mezi dvěma protilehlými body mřížky $m \times n$?



Otázky z úvodu o možnostech vyhodnocení databázových dotazů (i počtu jistých turnajů) souvisejí s tzv. *Catalanovými čísly*. Ty též udávají počet cest ve čtvercové mřížce neklesajících pod diagonálu.

Poznámky k pojmosloví a značení

Binomický koeficient se často nazývá *kombinační číslo* (též „*kombinace bez opakování*“).

Množina k-prvkových podmnožin množiny X se může značit $\binom{X}{k}$.

Multinomický koeficient $\binom{n}{k_1,\dots,k_l} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_l!}$ pro $k_1 + \cdots + k_l = n$ je roven počtu rozdělení n-prvkové množiny na nepřekrývající se množiny o velikostech $k_1, \dots, k_l$. Jde též o koeficient u členu $x_1^{k_1} \cdots x_l^{k_l}$ v roznásobení mnohočlenu $(x_1 + \cdots + x_l)^n$.