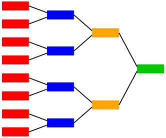
Kombinatorické počítání

... úlohy vedoucí na určení počtu, například:

- Kolik je různých registračních značek aut?

- Kolik je různých cest mezi dvěma městy?
- Kolik je možných pozic ve hře šachy?
- Kolik je substitučních šifer?
- Kolik je různých možností, jak naplánovat turnaj?
- Kolik je různých IP adres?



- Kolik je různých způsobů, jak vyhodnotit dotaz v databázích?

Často jde o *konečné* množiny matematických objektů, např. prvků, dvojic, množin či relací, někdy vymezené dalšími podmínkami, např. součty, nerovnostmi a podobně.

Počet dvojic

Definice: Počet prvků konečné množiny X nazýváme *mohutnost* X a značíme ji $|X|$.

Pozorování: Mají-li konečné množiny X a Y mohutnosti n a m, potom jejich kartézský součin $X \times Y$ má mohutnost nm.

... $X \times Y$ je množina dvojic, první prvek má n možností, druhý m.
... jde též o mohutnost univerzální relace (tj. velikost její tabulky).

Ukázka: Má-li si 200 studentů zapsat 5 přednášek, dostaneme $200 \cdot 5 = 1\,000$ záznamů (p, s) o zápisu přednášky p studentem s.

Důsledek: Počet uspořádaných trojic prvků vybraných z n-prvkové množiny X je n^3 a obecně je počet uspořádaných k-tic roven n^k.

... pro trojice jde o mohutnost kartézského součinu $X \times X \times X$ a pro k-tice $n^k = |\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{k\text{-krát}}|$

Ukázka: IP adresu tvoří uspořádaná čtveřice čísel v rozsahu $0-255$, proto různých IP adres je $256^4 = 4\,294\,967\,296$.

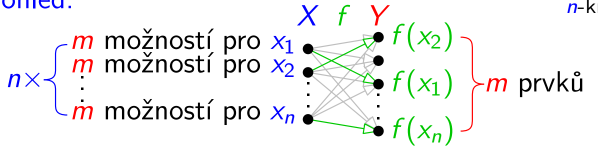
Počet zobrazení

Věta: Mají-li konečné množiny X a Y mohutnosti n a m, potom existuje m^n různých zobrazení $f : X \to Y$.

Důkaz: Pokud si označíme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, potom každé zobrazení f odpovídá jednoznačně uspořádané n-tici prvků z Y, jmenovitě $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ a počet těchto n-tic je m^n.

Jde o bijekci mezi množinou všech zobrazení, tj. $\{f : X \to Y\}$ a množinou všech možných n-tic prvků z Y, tj. $\underbrace{Y \times Y \times \cdots \times Y}_{n\text{-krát}}$.

Jiný pohled:



Ukázka: Pokud 5 dětem rozdáváme po jednom kusu ze čtyř možných druhů ovoce (jablko, hruška, meruňka a švestka), lze to provést $4^5 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{5\times} = 1\,024$ způsoby.

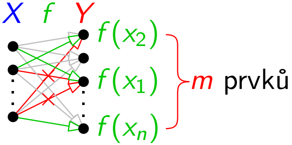
Počet prostých zobrazení

Věta: Mají-li konečné množiny X a Y mohutnosti n a m, potom existuje $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ různých *prostých* zobrazení $f : X \to Y$.

. . . pro $n > m$ je jeden činitel nulový a žádné prosté f neexistuje.

Důkaz:

m možností pro x_1
$m-1$ možností pro x_2
$\vdots$
$m-n+1$ možností pro x_n



Ukázka: Pokud si 5 dětí vybere po jedné z 8 různých hraček, mohou si je vybrat $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ způsoby.

Definice: Součin $1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{i=1}^{n} i$ zveme n *faktoriál* a značíme $n!$.

. . . počet prostých zobrazení pak lze vyjádřit:

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Poznámka: $0! = 1$ (odpovídá prázdnému součinu).

Počet permutací

Definice: Vzájemně jednoznačné zobrazení na konečné množině se nazývá *permutace*.

… odpovídá lineárnímu uspořádání prvků množiny.

Důsledek: Na n-prvkové množině je $n!$ různých permutací.

Ukázka: Na 26 písmenech je $26!$ různých substitučních šifer.

Otázka: Jak rychle roste faktoriál? Přímočarý odhad: $n! \leq n^n$

$$(n!)^2 = (1 \cdots n)(1 \cdots n) = \prod_{k=1}^{n} k(n-k) \;\Rightarrow\; n! = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} k(n-k)}$$

Z nerovností $n \leq k(n-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ plyne $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Přesnější odhad dává tzv. *Stirlingova formule*: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
26^{26} &= 6\,156\,119\,580\,207\,157\,310\,796\,674\,288\,400\,203\,776 &&\doteq 6,16 \cdot 10^{36} \\
\left(\tfrac{27}{2}\right)^{26} &\doteq 244\,724\,799\,219\,677\,718\,672\,625\,240\,694{,}124 &&\doteq 2,45 \cdot 10^{29} \\
26! &= 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000 &&\doteq 4,03 \cdot 10^{26} \\
\sqrt{52\pi}\left(\tfrac{26}{e}\right)^{26} &\doteq 402\,000\,993\,060\,954\,024\,530\,328\,458{,}902 &&\doteq 4,02 \cdot 10^{26} \\
26^{13} &= 2\,481\,152\,873\,203\,736\,576 &&\doteq 2,48 \cdot 10^{18}
\end{aligned}$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je možností, jak lze obarvit čtyři plaňky plotu šesti barvami? Každá plaňka má být jednobarevná.
   a) 24 b) 360 c) 720 d) 1 296 e) 4 096 f) 17 280
2. A kolik je možností obarvení plotu, pokud navíc chceme, aby plaňky měly různé barvy?
   a) 24 b) 360 c) 720 d) 1 296 e) 4 096 f) 17 280
3. Kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 postavit dvě věže různých barev, aby se navzájem neohrožovaly?
   a) $32 \cdot 49$, b) $\binom{64}{2}$, c) $64 \cdot 49$, d) $2\binom{64}{2}$, e) 56^2, f) $64 \cdot 63$,
4. Pravda nebo lež?
   Počet zobrazení z množiny $A \cup B$ do množiny C nepřesahuje součet počtu zobrazení z A do C a počtu zobrazení z B do C.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jaká je souvislost mezi asociativitou součinu a počtem k-tic?
- Jak lze kombinatoricky vysvětlit podíl ve výrazu pro počet prostých zobrazení?
- Jak se mění počet zobrazení vzhledem ke skládání, případně provedením množinových operací na nosných množinách?
- Z čeho plynou nerovnosti použité při odhadu faktoriálu? (Jedna je tzv. AG nerovnost.)

Poznámky k pojmosloví a značení

Pojem „*permutace*" někdy označuje *počet* permutací (coby vzájemně jednoznačných zobrazení).

Počtu zobrazení se také říká „*variace*", přičemž „*variace s opakováním*" zahrnují všechna zobrazení a „variace bez opakování" jen prostá.