OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 06. 05. 2014

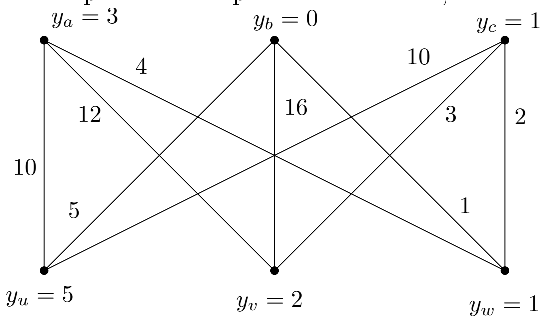
Věta 1 (Podmínky komplementarity)**.**

$$(\bar{P})\, maximalizuj\ c^T x \qquad (\bar{D})\, minimalizuj\ b^T y$$
$$pro\ x \geq 0 \qquad pro\ y \geq 0$$
$$za\ podmínek\ Ax \leq b \qquad za\ podmínek\ A^T y \geq c$$

Nechť x a y jsou přípustné řešení $(\bar{P})$ a $(\bar{D})$. Pak jsou obě optimální právě když platí následující podmínky:
- $(\forall j \in \{1, \dots, m\})(y_j = 0$ *nebo* $a^{(j)}x = b_j)$
- $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(x_i = 0$ *nebo* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = c_j)$

Definice 1 (Totální unimodularita)**.** Matice je totálně unimodulární, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je 0, +1 nebo −1.

Příklad 1. Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané váhy a u vrcholů řešení duálního programu k minimálnímu váženému perfektnímu párování. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Příklad 2. Nechť A je totálně unimodulární matice. Dokažte následující:
- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo −1.
- Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice.

Příklad 3. Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:
- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba rádky patří do B nebo zároveň do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Příklad 4. Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.

Příklad 5. Vezměme si jeden vektor (sloupec) v s hodnotami $\{0, 1\}^n$. Řekneme, že v je *intervalový*, pokud v má hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (třeba i délky 0). Matice M je *intervalová*, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.

Dokažte, že pro každou intervalovou matici M platí, že M je totálně unimodulární.

email: `elias+opt@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~elias/1314/opt/`