OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 29. 04. 2014

Věta 1 (Podmínky komplementarity)**.**

$(\bar{P})$*maximalizuj* c^Tx	$(\bar{D})$*minimalizuj* b^Ty
pro $x \geq 0$	*pro* $y \geq 0$
za podmínek $Ax \leq b$	*za podmínek* $A^Ty \geq c$

Nechť x *a* y *jsou přípustné řešení* $(\bar{P})$ *a* $(\bar{D})$*. Pak jsou obě optimální právě když platí následující podmínky:*

- $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})(y_j = 0$ *nebo* $a^{(j)}x = b_j)$
- $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(x_i = 0$ *nebo* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = c_j)$

Definice 1 (Totální unimodularita)**.** Matice je totálně unimodulární, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je 0, +1 nebo −1.

Příklad 1. Dualita nám umožňuje vyřešit úlohu lineárního programování „haluzí". Dokážete uhodnout optimální řešení primárního i duálního programu haluzí a dokázat, že obě jsou optimální?

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 2. Nechť $P = x;\ Ax \leq b$ je mnohostěn a $A'x \leq b'$ je podsystém $Ax \leq b$, označme $S = \{x \mid Ax \leq b,\ A'x = b'\}$. Již víme, že pro každý takový vlastní podsystém existuje nadrovina $H = \{x \mid w^Tx = t\}$ taková, že $P \subseteq H$ a $S = P \cap H \neq \emptyset$. Ukažte, že platí i opačná implikace. Tedy jestliže máme nadrovinu $H = \{x \mid w^Tx = t\}$ takovou, že $P \subseteq H$ a $S = P \cap H \neq \emptyset$, pak existuje podsystém $A'x \leq b'$ takový, že $S = \{x \mid Ax \leq b,\ A'x = b'\}$.

Příklad 3. Mějme následující celočíselný program pro problém minimální kostry (MST). Dokažte, že i jeho LP relaxace dává přesná řešení MST.

$$\begin{aligned} \text{minimize } \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \sum_{e \in A} x_e \leq n - \kappa(A), \quad A \subset E \\ \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \\ x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

1. Najděte duální úlohu k relaxaci předchozího programu.
2. Uvažte řešení, které nalezne Kruskalův algoritmus: nechť $e_1, \ldots, e_m$ jsou hrany seřazeny vzestupně podle ceny. Kruskalův algoritmus z nich hladově vybere minimální kostru. Najděte přípustné řešení duální úlohy takové, aby s Kruskalovým řešením splňovalo podmínky komplementarity.

Příklad 4. Nalezněte celočíselny mnohostěn $x;\ Ax \leq b, x \geq 0$, kde A a b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky −1, 0 a 1? A co když zakážeme i −1?
Pro Vámi nalezenou matici A najděte jiný vektor b takový, že mnohostěn nebude celočíselný.

Příklad 5. Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.