OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

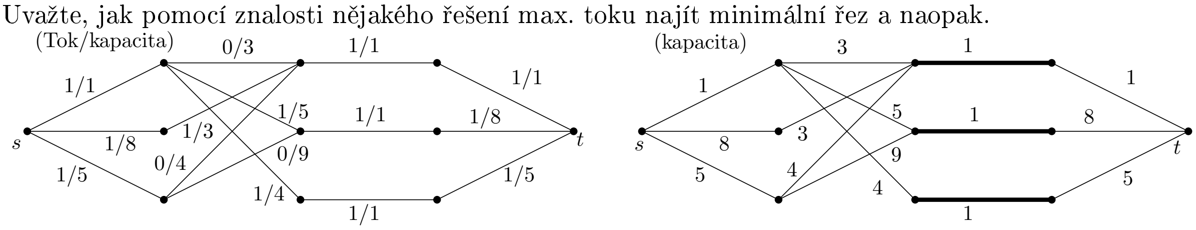
cvičení 21. 04. 2014

Příklad 1. Vyřešte primární i duální úlohy:

$$\begin{aligned}\max f&\\ x,y&\geq 0\\ y&\leq 4\\ x&\leq 4\\ 3x+2y&\leq 7\end{aligned}$$

pro funkce
(a) $f = x + y$,
(b) $f = 3x + 2y$.

Příklad 2. Na obrázku máte řešení problému maximálního toku a minimálního řezu na daném grafu. Uvažte, jak pomocí znalosti nějakého řešení max. toku najít minimální řez a naopak.



Příklad 3. Dualita nám umožňuje vyřešit úlohu lineárního programování „haluzí". Dokážete uhodnout optimální řešení primárního i duálního programu haluzí a dokázat, že obě jsou optimální?

$$\begin{aligned}\max 2x_1+3x_2+5x_3+4x_4&\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4&\leq 5\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=3\\ x_1+x_2+x_3+x_4&\geq 1\\ x_1,x_2,x_3,x_4&\geq 0\end{aligned}$$

Příklad 4. Nechť $P = x;\ Ax \leq b$ je mnohostěn a $A'x \leq b'$ je podsystém $Ax \leq b$. Již víme, že pro každý takový vlastní podsystém existuje nadrovina $H = \{x \mid w^T x = t\}$ taková, že $P \subseteq H$ a $S = P \cap H \neq \emptyset$. Ukažte, že platí i opačná implikace. Tedy jestliže máme nadrovinu $H = \{x \mid w^T x = t\}$ takovou, že $P \subseteq H$ a $S = P \cap H \neq \emptyset$, pak existuje podsystém $A'x \leq b'$ takový, že $S = \{x \mid Ax \leq b,\ A'x = b'\}$.

Příklad 5. Mějme následující celočíselný program pro problém minimální kostry (MST). Dokažte, že i jeho LP relaxace dává přesná řešení MST.

$$\begin{aligned}\text{minimize } &\sum_{e\in E} c_e x_e\\ &\sum_{e\in A} x_e \leq n-\kappa(A), \quad A\subset E\\ &\sum_{e\in E} x_e = n-1\\ &x_e\in\{0,1\}\end{aligned}$$

1. Najděte duální úlohu k relaxaci předchozího programu.
2. Uvažte řešení, které nalezne Kruskalův algoritmus: nechť $e_1, \ldots, e_m$ jsou hrany seřazeny vzestupně podle ceny. Kruskalův algoritmus z nich hladově vybere minimální kostru. Najděte přípustné řešení duální úlohy takové, aby s Kruskalovým řešením splňovalo podmínky komplementarity.

email: `elias+opt@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~elias/1314/opt/`

Příklad 6. Nalezněte celočíselny mnohostěn $x;\ Ax \leq b, x \geq 0$, kde A a b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?
Pro Vámi nalezenou matici A najděte jiný vektor b takový, že mnohostěn nebude celočíselný.

Příklad 7. Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.