OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 18. 03. 2014

Definice 1 (Afinní nezávislost). $a_0, \dots, a_k$ jsou afinně nezávislé, pokud neexistují netriviální $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ takové, že $\sum \alpha_i a_i = 0$ a $\sum \alpha_i = 0$.

Definice 2 (Afinní kombinace). Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Pak afinní kombinací těchto bodů nazýváme $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pro každé i a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Definice 3 (Konvexní kombinace). Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Pak konvexní kombinací těchto bodů nazýváme $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ pro každé i a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Příklad 1. Buď Labe regulovaná řeka (tj. v našem okolí daná rovnicí $ax = b$), buď dále hospoda objekt na levém břehu Labe. Dále víte, že jdete-li (rovnou) cestou od hospody k přívozu, míjíte kiosek. Ukažte, že kiosek neleží ani na pravém břehu ani na Labi.

Příklad 2. Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ platí, že:

$$\vec{a_i}^T \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x_j}\right) \leq b_i.$$

Příklad 3. Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1,\ 2, \dots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ platí, že:

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k \vec{a_k}) \cdot \vec{x_j} \leq \sum_{m=1}^n (\beta_m b_m).$$

Všimněte si rozdílu v zadání těchto příkladů!

Tip: Dokazujte obě tvrzení pro co nejmenší množinu objektů, tj. první tvrzení pro jedno omezení a druhé tvrzení pro jeden bod.

Příklad 4. Odvoďte tvrzení analogická dvěma předchozím příkladům, která odpovídají afinitě a dokažte je.

Příklad 5. Dokažte, že v $\mathbb{R}^n$ je nejvýše $n+1$ afinně nezávislých bodů.

Příklad 6. Máme k dispozici šest sirek. Jak je poskládat tak, aby jsme z nich vytvořili čtyři trojúhelníky?

Definice 4 (stěna mnohostěnu). Nechť P je mnohostěn a $A = \{x \mid c^T x = t\}$ je taková nadrovina, že $c^T x \leq t$ pro každé $x \in P$. Pak $P \cap A$ je stěna P.

Definice 5 (simplex). Konvexní obal $d+1$ afinně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^n$ pro nějaké $n \geq d$ se nazývá d-dimenzionální simplex.

Příklad 7. Dokažte, že stěna simplexu je simplex.

Příklad 8. Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:

$$\max c^T x, Ax \leq b$$

je konvexní množina.

Příklad 9. Dokažte, že když mnohostěn $Ax \leq 0$ má dvě různá řešení, tak je neomezený.