OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 11. 03. 2014

Definice 1 (Afinní nezávislost). $a_0, \dots, a_k$ jsou afinně nezávislé, pokud neexistují netriviální $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ takové, že $\sum \alpha_i a_i = 0$ a $\sum \alpha_i = 0$.

Definice 2 (Afinní kombinace). Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Pak afinní kombinací těchto bodů nazýváme $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pro každé i a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Definice 3 (Konvexní kombinace). Nechť $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Pak konvexní kombinací těchto bodů nazýváme $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ pro každé i a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Příklad 1.
(a) Dokažte, že $\mathrm{conv}(\{[0,0],[0,1],[1,0],[1,1]\})$ je čtverec s vrcholy ve zmíněných bodech.
(b) Nechť $A = L + u$ je afinní prostor. Dokažte, že A dostaneme posunutím L o libovolný vektor z A, resp. dokažte, že pro libovolné dva vektory $v, v' \in A$ platí, že $L + v = L + v'$, t.j. každé $a = x + v, x \in L$ můžeme zapsat jako $a = x' + v', x' \in L$.

Příklad 2. *Křížový mnohostěn* definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn*.

Mějme křížový mnohostěn A plné dimenze v $\mathbb{R}^5$, který má střed posunutý do bodu $(5, 4, 3, 2, 1)$. Zároveň vezměme útvar $B \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1/2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.5\}$.

Rozhodněte, jestli útvar $A \cap B$ je konvexní nebo ne, a své tvrzení dokažte.

Příklad 3. Alenka a Bob hrají hru. Alenka si vymyslí lineární nerovnost N v $\mathbb{R}^3$, ale neřekne ji Bobovi. Bobovi jen řekne dva různé body b_1, b_2 v $\mathbb{R}^3$, které tuto nerovnost splňují. Bob nyní musí říkat další body $b_4, b_5, b_6 \ldots$, které také nerovnost splňují, a to do té doby, než to Alenku neomrzí a nepůjdou spolu skákat panáka.

Poraďte Bobovi, jak má hrát, aby vyhrál.

Příklad 4. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Pro množinu bodů X v $\mathbb{R}^n$ platí, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in X$ je celá úsečka $[x_1, x_2]$ obsažena v X.
- Pro množinu bodů X v $\mathbb{R}^n$ platí, že $X = \{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k | k \in \mathbb{N}, x_i \in X, \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$.

Příklad 5. Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ platí, že:

$$\vec{a_i}^T \cdot (\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x_j}) \leq b_i.$$

Příklad 6. Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, \ 2, \ldots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ platí, že:

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k \vec{a_k}) \cdot \vec{x_j} \leq \sum_{m=1}^n (\beta_m b_m).$$

Všimněte si rozdílu v zadání těchto příkladů!

Tip: Dokazujte obě tvrzení pro co nejmenší množinu objektů, tj. první tvrzení pro jedno omezení a druhé tvrzení pro jeden bod.

Příklad 7. Odvoďte tvrzení analogická dvěma předchozím příkladům, která odpovídají afinitě a dokažte je.

Příklad 8. Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:

$$\max c^T x, Ax \leq b$$

je konvexní množina.

Příklad 9. Dokažte, že když mnohostěn $Ax \leq 0$ má dvě různá řešení, tak je neomezený.