OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 04. 03. 2014

Příklad 1. (Problém obchodního cestujícího.) Pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to R$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Lze tento problém řešit podobným způsobem jako v příkladě nejkratší cesty (který byste měli znát z přednášky), tj. pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in 0, 1$, cílová funkce je min $\sum_{uv\in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{uv\in E} = 2$?

Příklad 2. Potřebujeme určit vzdálenost dvou mnohostěnů

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq a\} \text{ a } Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By \leq b\}$$

v pošťácké metrice: $\operatorname{dist}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Vzdálenost dvou mnohostěnů definujeme jako vzdálenost dvou nejbližších bodů x a y, kde $x \in P$ a $y \in Q$.

Příklad 3. Mějme polyedr $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převeďte tento zápis do rovnicového tvaru a nakreslete polyedr z rovnicového tvaru.

Definice 1 (Afinní prostor)**.** $A \subseteq \mathbb{R}$ je afinní prostor, pokud $A = L + x$, kde L je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ a x je vektor z $\mathbb{R}^n$.

Definice 2 (Afinní kombinace)**.** Nechť $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Pak afinní kombinací těchto bodů nazýváme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pro každé i a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Příklad 4. Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ a b vektor z $\mathbb{R}^2$. Rozmyslete si, jak může vypadat množina $\{x \in \mathbb{R}^3 | Ax = b\}$ geometricky. Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?

Příklad 5. Dokažte následující tvrzení. Vektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě, když $0, v_1, \ldots, v_k$ jsou afinně nezávislé, kde 0 je nulový vektor. Dále dokažte, že $\operatorname{lin.hull}(v_1, \ldots v_k) = \operatorname{aff.hull}(0, v_1, \ldots, v_k)$.

Příklad 6. Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $W = U + v$ pro nějaký vektor v. Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor U na afinní prostor W.

Definice 3. $a_0, \ldots, a_k$ jsou afinně nezávislé, pokud neexistují netriviální $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ takové, že $\sum \alpha_i a_i = 0$ a $\sum \alpha_i = 0$.

Příklad 7. $a_0, a_1, \ldots, a_k$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 8. Dokažte, že $\dim\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\} = n - \operatorname{rank}(A)$.

Příklad 9. Nechť $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 3\}$. Převeďte tento zápis do rovnicového tvaru a určete, jak vypadají jeho vrcholy a hrany.