OPTIMALIZAČNÍ METODY (NOPT048)

cvičení 25. 02. 2014

Příklad 1. S pomocí znalostí z přednášky rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- Každá úloha LP (polynomiální velikosti) je řešitelná v polynomiálním čase.
- Každá úloha IP (polynomiální velikosti) je NP-těžká.
- Vždy existuje optimální řešení LP, které je ve vrcholu mnohostěnu podmínek.
- Každé optimální řešení LP je ve vrcholu mnohostěnu podmínek.

Příklad 2. Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy. K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli. Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli. Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli. Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce. Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec, a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun. Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéct?

Příklad 3. Zemědělské družstvo má k dispozici 1200ha orné půdy pro pěstování plodin. Pro půdu v dané oblasti je vhodná pšenice, ječmen, řepka, kukuřice a slunečnice. Řepku není možné pěstovat na více než 250ha půdy a slunečnici není možné pěstovat na více než 500ha půdy. V tabulce naleznete náklady na pěstování 1ha plodin a očekávaný výnos z 1ha. Maximalizujte očekávaný zisk družstva, které má k dispozici rozpočet 750000 Kč. Formulujte lineární program pro výpočet očekávaného maximálního výdělku.

Plodina	Náklady (100Kč/ha)	Výnosy (1000Kč/ha)
Pšenice	3	2
Ječmen	4	5
Řepka	6	8
Kukuřice	5	6
Slunečnice	7	9

Příklad 4. Pro každý zadaný problém navrhněte lineární nebo celočíselný program, který jej řeší. (Pokud přijdete na lineární program, je to vždy lepší, ale nejde to vždy.)

- (Souvislost grafu.) Pro zadaný neorientovaný graf G rozhodněme, jestli G je souvislý.
- (Maximální vážené párování.) Pro zadaný vážený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}$, nalezněte maximální párování. Párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s maximálně jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování. .
- (Problém obchodního cestujícího.) Pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to R$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Lze tento problém řešit podobným způsobem jako v příkladě nejkratší cesty (který byste měli znát z přednášky), tj. pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in 0, 1$, cílová funkce je $\min \sum_{uv\in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{uv\in E} = 2$?

Příklad 5. [Klasický dopravní problém I] V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun. Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální. Zamyslete se nad podmínkami, aby požadováná distribuce vůbec existovala.

Příklad 6. [Klasický dopravní problém II] Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Příklad 7. Potřebujeme určit vzdálenost dvou mnohostěnů:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le a\} \text{ a } Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By \le b\}$$

v pošťácké metrice: $\mathrm{dist}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Vzdálenost dvou mnohostěnů definujeme jako vzdálenost dvou nejbližších bodů x a y, kde $x \in P$ a $y \in Q$.

email: `elias+opt@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~elias/1314/opt/`