

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

Cvičení 15.11.2013

Věta 1 (Bayesova věta). *Nechť B_1, \dots, B_n je rozklad Ω . Pak*

$$P[B_i | A] = \frac{P[A | B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^n P[A | B_j]P[B_j]}$$

Příklad 1. Od června 2013 víme, že nás všechny sleduje americká bezpečnostní agentura NSA (čte naše emaily, odposlouchává skype hovory atd.). Smyslem jejich počínání je (údajně) hledat teroristy; pomocí počítačového algoritmu se snaží najít „podezřelé“ jedince.

Budme k nim shovívaví a řekněme, že jejich test je velmi přesný – selže jen v 1% případů. Dejme tomu, že v USA žije 300 miliónů lidí a z nich 300 jsou teroristé. Jaká je pravděpodobnost, že algoritmem označený člověk není terorista?

Příklad 2. Zahradnická firma sází po městě stromky; víme, že průměrně 90% z nich přežije. Jaká je pravděpodobnost, že z následujících 13 zasazených stromů, jich:

[a]. Přežije nejvýše 10?

[b]. Přežije alespoň 10?

[c]. Přežije přesně 10?

Příklad 3. Po dlouhé noci se m opilých námořníků vrací do n kajut (rovnoměrně náhodně).

[a]. Kolik bude průměrně námořníků v jedné kajutě?

[b]. Kolik bude průměrně prázdných kajut?

Věta 2 (Markovova nerovnost). *Pro nezápornou náhodnou veličinu X platí:*

$$P[X \geq t\mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Definice 1 (Rozptyl). Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Věta 3 (Čebyševova nerovnost).

$$P[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2}$$

Příklad 4. Zkuste navrhnout algoritmus, který pro zadaný graf G rozhodne, zda je souvislý, a pro nesouvislý graf najde rozklad množiny $V(G)$ na komponenty.

Definice 2 (Matice sousednosti). Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy. Označme vrcholy v_1, \dots, v_n . Matice sousednosti grafu G je čtvercová matice $A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ definovaná předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad 5. Buď G graf na n vrcholech, $A = A_G$ jeho matice sousednosti, a I_n jednotková matice typu $n \times n$. Dokažte, že G je souvislý právě když $(I_n + A)^{n-1}$ nemá žádné nulové členy.