DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Cvičení 01.11.2013

Definice 1 (maximum)**.** Buď $\Omega = (X, \leq)$ uspořádaná množina, $A \subseteq X$ její podmnožina. Maximum množiny A nazýváme takové $m \in A$, že $a \leq m \; \forall a \in A$.

Definice 2 (supremum)**.** Buď $\Omega = (X, \leq)$ uspořádaná množina, $A \subseteq X$ její podmnožina. Prvek $s \in X$ nazveme supremum množiny A, pokud platí: (i) $a \leq s \; \forall a \in A$ a zároveň (ii) pro každé $s' \in X$ platí: $(a \leq s' \; \forall a \in A) \Rightarrow s \leq s'$.
Jinak řečeno $\sup(A) = \min\{s' \in X \mid a \leq s' \; \forall a \in A\}$.

Příklad 1. Kolik čísel zbude z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ po vyškrtání všech násobků čísel $2, 3, 5, 7$?

Příklad 2. Kolik existuje pořadí písmen $A, B, C, \ldots, O, P$, z nichž vypuštěním některých písmen nelze dostat ani jedno ze slov PONK, DOBA a COP?

Příklad 3. Na plese je n manželských párů. Kolika způsoby lze utvořit n tanečních párů, jestliže žádná manželská dvojice netancuje spolu?

Příklad 4. Určete počet permutací s právě jedním pevným bodem, resp. s právě k pevnými body.

Příklad 5. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1$$

Příklad 6. Mějme množiny N, M, $|N| = n, |M| = m$. Kolik existuje zobrazení N *na* M pro
(a) $m = 2$
(b) $m = 3$
(c) obecné m?

Příklad 7. Kolik je celkem ekvivalencí na n-prvkové množině?

Příklad 8. Kolika způsoby lze rozdělit n lidí do k skupin, tj., kolik existuje ekvivalencí na n-prvkové množině s právě k třídami?

Příklad 9. Mějme $X \subseteq \mathbb{N}$ velikosti n. Musí X nutně obsahovat dva prvky, které mají stejný zbytek modulo p? (rozeberte případy podle volby p).

Příklad 10. V pravidelném dvacetiúhelníku je 9 vrcholů vyznačeno zlatou barvou. Dokažte, že aspoň tři z nich tvoří rovnoramenný trojúhelník.

email: `elias@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~elias/1314/dm/`.