DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Domácí úkol 4

Příklad 1. V politické straně která má 60 členů chtějí zvolit předsedu, tři místopředsedy a pět druhých místopředsedů. S tím, že každý člen může zastávat pouze jednu funkci a posty místopředsedů jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby lze takovou volbu provést? Výsledek není třeba na konci vyčíslovat.
[2 bod]

Příklad 2. Podívejme se v Pascalově trojúhelníku na jednotlivé položky řádku jako na „cifry“ jakéhosi čísla P_n v desítkové soustavě – pro $n = 2$ to je 121, pro $n = 3$ to je 1331, pro $n = 4$ to je 16051. (Ten poslední případ je asi netriviální, získáme ho následovně: $\binom{5}{0} \cdot 10^0 + \binom{5}{1} \cdot 10^1 + \binom{5}{2} \cdot 10^2 + \binom{5}{3} \cdot 10^3 + \binom{5}{4} \cdot 10^4 + \binom{5}{5} \cdot 10^5$.)
Všimnuli jste si, že $P_2 = 121 = 11^2$, $P_3 = 1331 = 11^3$ a tak dále? Dokažte to obecně, tzn. $P_n = 11^n$.
[2 body]

Příklad 3. Opět Pascalův trojúhelník. Podívejme se tentokrát na p-tý řádek pro p prvočíslo. Všimnuli jste si, že všechny prvky tohoto řádku (až na krajní jedničky) jsou násobky toho prvočísla? (Například pro $p = 3$ to je 3, 3, pro $p = 7$ to je 7, 21, 35, 35, 21, 7.) Dokažte, že to platí pro libovolné prvočíslo p.
[1 bod]

Příklad 4. Buď p prvočíslo a n přirozené číslo. Dokažte, že $\binom{n}{p}$ je dělitelné p právě když $\lfloor n/p \rfloor$ je dělitelné p.
[2 body]

Příklad 5. Spočítejte, kolik je uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$.
[1 bod]

email: `elias@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~elias/1314/dm/`.