DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Cvičení 18.10.2013

Příklad 1. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Příklad 2. Rozmyslete si že relace dělitelnosti na $\mathbb{N}$ je ČUM, nakreslete její Hasseho diagram pro $n = 10$ a nalezněte její největí/nejmenší/maximální/minimální prvek, či si rozmyslte že neexistuje.
Jak vypadá supremum a infimum takové relace?

Definice 1 (Isomorfismus uspořádaných množin)**.** Nechť $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Říkáme o nich, že jsou isomorfní, pokud existuje nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon X \to Y$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \leq y$ právě když $f(x) \preceq f(y)$.

Příklad 3.
(a) Najděte dvě navzájem neisomorfní lineární uspořádání množiny všech přirozených čísel.
(b) Najděte nekonečně mnoho navzájem neisomorfních lineárních uspořádání $\mathbb{N}$.

Příklad 4. Uvažme dvě posloupnosti reálných čísel, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, v nichž se žádné číslo neopakuje. Ukažte, že vždy existují indexy $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, kde $k = \lceil n^{1/4} \rceil$, takové, že posloupnosti $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ i $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k})$ jsou rostoucí nebo klesající.

Definice 2 (Vnoření uspořádání)**.** Nechť $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Zobrazení $f\colon X \to Y$ nazýváme vnoření $(X, \leq)$ do $(Y, \preceq)$, jestliže platí:
(i) f je prosté
(ii) $f(x) \preceq f(y)$ pro každé $x \leq y$
(iii) jestliže $f(x) \preceq f(y)$, potom i $x \leq y$

Příklad 5.
(a) Popište nějaké vnoření množiny $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání podle velikosti.
(b) Popište vnoření $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Příklad 6. Dokažte, že pro každou uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ existuje vnoření do uspořádané množinu $(2^X, \subseteq)$

Příklad 7. Nechť $\preceq_i, i = 1, \ldots, k$ jsou uspořádání na množině X. Dokažte, že $\bigcap_{i=1}^{k} \preceq_i$ je opět uspořádání.

Příklad 8. Dokažte, že má-li každá podmnožina ČUM supremum, tak má každá podmnožina také infimum.