

Algoritmická teorie her – příklady na 2. cvičení*

1 Nashova ekvilibria

Hra v normálním tvaru je trojicí (P, A, u) , kde P je množina n hráčů, $A = A_1 \times \dots \times A_n$ je množina profilů akcí, kde A_i označuje množinu akcí hráče i , a $u = (u_1, \dots, u_n)$ je n -ticí, ve které každé $u_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ je užítkovou funkcí hráče i .

Množina čistých strategií hráče i je množinou A_i akcí hráče i . Množina S_i smíšených strategií hráče i je množinou pravděpodobnostních rozdělení na A_i . Střední hodnotou užítkové funkce hráče i na smíšeném strategickém profilu $s = (s_1, \dots, s_n)$ je

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1, \dots, a_n) \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Použijeme značení $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ a, pro strategii $s'_i \in S_i$ hráče i , použijeme $u_i(s'_i; s_{-i})$ k označení čísla $u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Nejlepší odpověď hráče i na strategický profil s_{-i} je smíšená strategie s_i^* taková, že $u_i(s_i^*; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i})$ pro každou strategii $s'_i \in S_i$. Nashovým ekvibiem v G je strategický profil $(s_1, \dots, s_n)$ takový, že s_i je nejlepší odpověď hráče i na s_{-i} pro každé $i \in P$.

Pozorování 1 (Best response condition). V normální hře $G = (P, A, u)$ n hráčů je pro každého hráče $i \in P$ smíšená strategie s_i nejlepší odpověď na s_{-i} právě tehdy, když všechny čisté strategie v doméně s_i jsou nejlepšími odpověďmi na s_{-i} .

Příklad 1. Ověřte, že střední hodnota užítkové funkce ve hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je lineární. Neboli dokažte, že $u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a každý smíšený strategický profil $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Příklad 2. Spočítejte Nashova ekvilibria v následujících hrách:

(a) Věžňovo dilemma,

	Svědčit	Mlčet
Svědčit	(-2,-2)	(0,-3)
Mlčet	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 1: Věžňovo dilemma v normálním tvaru.

(b) Kámen-nůžky-papír.

	Kámen	Papír	Nůžky
Kámen	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papír	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Nůžky	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Tabulka 2: Kámen-nůžky-papír v normálním tvaru.

Formálně dokažte, že žádná jiná ekvilibria v těchto hrách neexistují.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/>

Příklad 3 (Iterovaně dominovaná ekvilibria). Necht' $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Pro každého hráče i řekneme, že strategie $s_i \in S_i$ je ostře dominovaná strategií $s'_i \in S_i$, pokud pro každé $s_{-i} \in S_{-i}$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) < u_i(s'_i; s_{-i})$. Uvažte následující iterovaný proces, který nám v některých hrách pomůže najít Nashovo ekvilibrium.

Nastavme $A_i^0 = A_i$ a $S_i^0 = S_i$ pro každého hráče $i \in P$. Pro $t \geq 1$ and $i \in P$ buď A_i^t množina čistých strategií z A_i^{t-1} , které nejsou ostře dominovány strategií z S_i^{t-1} a buď S_i^t množina smíšených strategií, které mají support obsažený v A_i^t . Necht' T je prvním krokem, ve kterém se množiny A_i^T a S_i^T již nezměňují pro žádného hráče $i \in P$. Má-li poté každý hráč $i \in P$ pouze jednu strategii $a_i \in A_i^T$, tak řekneme, že $a_1 \times \dots \times a_n$ je iterovaně dominované ekvilibrium hry G .

- (a) Ukažte, že iterovaně dominované ekvilibrium je Nashovým ekvilibriem.
- (b) Nalezněte příklad hry, která má čisté Nashovo ekvilibrium, které není iterovaně dominovaným ekvilibriem.

Příklad 4. Použijte metodu z Příkladu 3 k nalezení unikátního Nashova ekvilibria v následující hře dvou hráčů (viz Tabulka 3) zredukováním této hry na hru 2×2 .

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	(5, 2)	(22, 4)	(4, 9)	(7, 6)
r_2	(16, 4)	(18, 5)	(1, 10)	(10, 2)
r_3	(15, 12)	(16, 9)	(18, 10)	(11, 3)
r_4	(9, 15)	(23, 9)	(11, 5)	(5, 13)

Tabulka 3: Hra z příkladu 4.

Příklad 5 (Týdenní výzva 1). Zhlédněte scénu z filmu Čistá duše (*A Beautiful Mind*), kde John Nash hraný Russellem Crowem vysvětluje pojem Nashova ekvilibria. Předpokládejme, že daná situace je modelována hrou čtyř hráčů (muži), kde každý má pět možných akcí (ženy). Vysvětlete, proč řešení navržené ve filmu není Nashovým ekvilibriem.

Příklad 6 (Týdenní výzva 2). Ve třídě se nachází $n \geq 2$ studentů a cvičící se právě zeptal na otázku. Každý student má k dispozici dvě akce: buď odpoví nebo ne. Pokud nikdo neodpoví, pak všichni studenti dostanou výplatu 0. Pokud někdo pomůže, pak všichni dostanou výplatu 1 kromě studentů, kteří odpověděli, ti získají výplatu $1 - c$ pro nějaké $c \in (0, 1)$. Nalezněte symetrické Nashovo ekvilibrium této hry. Jaká je potom pravděpodobnost, že někdo odpoví? Je pro cvičícího lepší mít ve třídě více studentů?