

Algoritmická teorie her – příklady na 7. cvičení*

1 Hrubá korelovaná ekvilibria

Pro hru $G = (P, A, C)$ v normálním tvaru pro n hráčů je pravděpodobnostní rozdělení $p(a)$ na A *korelovaným ekvilibriem* v G , pokud $\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a_i; a_{-i})p(a_i; a_{-i}) \leq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a'_i; a_{-i})p(a_i; a_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a všechna $a_i, a'_i \in A_i$. Pravděpodobnostní rozdělení $p(a)$ na A je *hrubým korelovaným ekvilibriem* v G , pokud $\sum_{a \in A} C_i(a)p(a) \leq \sum_{a \in A} C_i(a'_i; a_{-i})p(a)$ pro každého hráče $i \in P$ a každé $a'_i \in A_i$.

Příklad 1. Formálně dokažte, že každé korelované ekvilibrium je hrubým korelovaným ekvilibriem.

Příklad 2. Spočítejte všechna hrubá korelovaná ekvilibria ve hře Věžňovo dilemma.

	T	S
T	(2,2)	(0,3)
S	(3,0)	(1,1)

Tabulka 1: Hra z příkladu 2.

2 Regret minimalizace

Máme množinu $X = \{1, \dots, N\}$ s N akcemi a v každém kroce t online algoritmus A vybere pravděpodobnostní rozdělení $p^t = (p_1^t, \dots, p_N^t)$ na X . Poté, co je rozdělení p^t vybráno v kroce t , nepřátelské prostředí zvolí ztráty $\ell^t = (\ell_1^t, \dots, \ell_N^t) \in [-1, 1]^N$, kde ℓ_i^t je ztrátou za akci i v čase t . Algoritmus A poté prodělá ztrátu $\ell_A^t = \sum_{i=1}^N p_i^t \ell_i^t$. Po T krocích je kumulovaná ztráta akce i rovna $L_i^T = \sum_{t=1}^T \ell_i^t$ a kumulovaná ztráta algoritmu A je $L_A^T = \sum_{t=1}^T \ell_A^t$. Budeme také používat $L_{\min}^T = \min_{i \in X} L_i^T$. Externí regret algoritmu A je $R_A^T = \max_{i \in X} \{L_A^T - L_i^T\} = L_A^T - L_{\min}^T$.

Příklad 3. Mějme online algoritmus A , který vybírá z akcí 1 a 2 po $T = 3$ kroky. Ztráty za jednotlivé akce jsou nastavené následovně:

Krok t	Ztráta ℓ_1^t za 1	Ztráta ℓ_2^t za 2
1	0.3	0.4
2	0.7	0.2
3	0.6	0.5

Tabulka 2: Ztráty za jednotlivé akce po tři kroky z Příkladu 3.

Algoritmus A vybírá akce 1, 1, 2 v krocích 1, 2, 3, všechny s pravděpodobností 1. Spočítejte kumulovanou ztrátu L_A^T , kumulovanou ztrátu L_i^T akce $i \in \{1, 2\}$ a externí regret R_A^T .

Příklad 4. Je externí regret vždy nezáporný? (Myšleno pro každou posloupnost $(\ell^t)_{t=1}^T$ ztrátových vektorů a každý algoritmus A .) Dovedete odvodit horní odhad na externí regret, který vždy platí?

Příklad 5. Algoritmus je deterministický pokud v každém kroce t existuje akce i s $p_i^t = 1$. Ukažte, že pro každý deterministický algoritmus D a $T \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost ztrátových vektorů taková, že $L_D^T = T$ a $L_{\min}^T \leq \lfloor T/N \rfloor$. Neboli $L_D^T \geq N \cdot L_{\min}^T + (T \bmod N)$.

Příklad 6 (*). Dokažte následující dolní odhady na externí regret.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/>

- (a) Pro přirozená čísla N a $T < \lfloor \log_2 N \rfloor$ uvažme následující posloupnost ztrátových vektorů. V kroce 1 dostane náhodná podmnožina $N/2$ akcí ztrátu 0 a zbytek dostane ztrátu 1. V kroce $t \geq 2$ náhodná polovina akcí, které dosud dostaly ztrátu 0, dostane ztrátu 0 a všechny zbylé akce dostanou ztrátu 1. Ukažte, že pro každý online algoritmus A máme $\mathbb{E}[L_A^T] \geq T/2$ a přitom $L_{\min}^T = 0$.
- (b) V případě $N = 2$ uvažme následující posloupnost ztrátových vektorů. Mějme $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, 1)$. V každém kroce $t \in \{1, \dots, T\}$ nastavme $\ell^t = e_1$ s pravděpodobností $1/2$ a $\ell^t = e_2$ s pravděpodobností $1/2$. Ukažte, že pro každý online algoritmus A máme $\mathbb{E}[L_A^T - L_{\min}^T] \geq \Omega(\sqrt{T})$.