

Algoritmická teorie her – příklady na 11. cvičení*

1 Myersonovo lemma

Alokační pravidlo x je *implementovatelné*, pokud existuje platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC. Alokační pravidlo x je *monotónní*, pokud pro každého nabízejícího i a libovolné nabídky b_{-i} ostatních je alokace $x_i(z; b_{-i})$ nabízejícího i neklesající v jeho nabídce z .

Věta 1 (Myersonovo lemma). *V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.*

- (a) *Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.*
- (b) *Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).*
- (c) *Platební pravidlo p je určené následujícím vzorcem*

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i}) dz$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Je-li funkce $x_i(z; b_{-i})$ po částech konstantní s body zlomu $z_1, \dots, z_\ell$, pak vzoreček pro platby dává

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \sum_{j=1}^{\ell} z_j \cdot \text{jump}(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j),$$

kde $\text{jump}(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j)$ je velikost skoku funkce $x_i(\cdot; b_{-i})$ v bodě zlomu z_j .

Příklad 1. Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuaí zatímco ostatním kupujícím naučtuje 0.

Příklad 2. Máme veřejný projekt, jehož výstavba je zvažována n agenty, kde každý agent i má valua $v_i \geq 0$ udávající jak moc chce, aby byl projekt postaven. Je-li projekt postaven, tak každý agent jej může využívat, ale k tomu je potřeba, aby celkový zájem o projekt byl aspoň C ; není-li postaven, tak jej nemůže využívat nikdo a celkový sociální zisk je 0.

Zformulujte tento problém jako 1-parametrové prostředí a použijte Myersonovo lemma k navržení DSIC mechanismu pro příslušnou aukci.

Příklad 3. Bud' $G = (V, E)$ graf s hranami ohodnocenými funkcí w , která jim přiřazuje záporné hodnoty. Cílem je najít minimální kostru v G .

Zformulujte tento problém jako 1-parametrové prostředí a použijte Myersonovo lemma k navržení DSIC mechanismu pro příslušnou aukci.

Motivace: máme n měst, kde chceme opravit silnice mezi městy tak, aby se z každého města dalo dostat do každého jen po opravených úsecích. Každý úsek silnic mezi dvěma městy má ale na starost jedna společnost, která má o danou zakázku oprav nějaký zájem. Chceme zakázky přiřadit tak, aby celková spokojenost společností byla maximální a přitom počet opravených úseků byl minimální. Cílem je ukázat, že pro tento problém je možné navrhnout aukci, kde každá společnost má jasnou strategii nabízení.

Příklad 4. Navrhněte DSIC mechanismus maximalizující sociální zisk v 1-parametrovém prostředí s množinou přípustných řešení $X = \{(\log y_1, \dots, \log y_n) : y_1, \dots, y_n > 0, \sum_{i=1}^n y_i = 1\}$. Použijte alokační pravidlo, kde $y_i = b_i / \sum_{j=1}^n b_j$. Můžete předpokládat, že všechny valuae jsou kladné.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/>