Algoritmická teorie her – příklady na 6. cvičení*

18. listopadu 2024

1 Regret minimalizace

Pro hru $G = (P, A, C)$ v normálním tvaru pro n hráčů je pravděpodobnostní rozdělení $p(a)$ na A *korelovaným ekvilibriem* v G, pokud $\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i}) \leq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a'_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a všechna $a_i, a'_i \in A_i$. Pravděpodobnostní rozdělení $p(a)$ na A je *hrubým korelovaným ekvilibriem* v G, pokud $\sum_{a \in A} C_i(a) p(a) \leq \sum_{a \in A} C_i(a'_i; a_{-i}) p(a)$ pro každého hráče $i \in P$ a každé $a'_i \in A_i$.

Exercise 1. *Formálně dokažte, že každé korelované ekvilibrium je hrubým korelovaným ekvilibriem.*

Exercise 2. *Spočítejte všechna hrubá korelovaná ekvilibria ve hře Vězňovo dilema.*

	T	S
T	(2,2)	(0,3)
S	(3,0)	(1,1)

Tabulka 1: Hra z příkladu 2

Máme množinu $X = \{1, \dots, N\}$ s N akcemi a v každém kroce t online algoritmus A vybere pravděpodobnostní rozdělení $p^t = (p_1^t, \dots, p_N^t)$ na X. Poté, co je rozdělení p^t vybráno v kroce t, nepřátelské prostředí zvolí ztráty $\ell^t = (\ell_1^t, \dots, \ell_N^t) \in [-1, 1]^N$, kde ℓ_i^t je ztrátou za akci i v čase t. Algoritmus A poté prodělá ztrátu $\ell_A^t = \sum_{i=1}^N p_i^t \ell_i^t$. Po T krocích je ztráta akce i rovna $L_i^T = \sum_{t=1}^T \ell_i^t$ a ztráta algoritmu A je $L_A^T = \sum_{t=1}^T \ell_A^t$. *Externí regret* algoritmu A je $R_A^T = \max_{i \in X} \{L_A^T - L_i^T\}$.

Exercise 3. *Nechť je A algoritmus s parametrem $\eta \in (0, 1/2]$ a s externím regretem nanejvýš $\alpha/\eta + \beta\eta T$ pro nějaké konstanty α, β (které mohou záviset na počtu akcí N). Ukázali jsme, že volba $\eta = \sqrt{\alpha/(T\beta)}$ minimalizuje odhad na regret. Modifikujte tento algoritmus tak, abychom dostali odhad na regret, který je nanejvýš $O(1)$-krát větší než původní odhad pro každé T. Tedy nechceme, aby parametr η závisel na T.*

Nápověda: Rozdělte množinu $\{1, \dots, T\}$ na vhodně intervaly I_m pro $m = 0, 1, 2, \dots$ a pusťte A s vhodným parametrem η_m na všech krocích z I_m.

Exercise 4 (*)**.** *Dokažte následující tvrzení o dolních odhadech na externí regret.*

(a) *Jsou-li N a T přirozená čísla taková, že N je mocnina dvojky a $T < \log_2 N$, pak existuje volba náhodných vektorů ztrát z $\{0, 1\}$ takových, že každý online aloritmus A splňuje $\mathbb{E}[L_A^T] \geq T/2$ a $L_{min}^T = 0$.*

(b) *Pro $N = 2$, existuje volba náhodných vektorů ztrát z $\{0, 1\}$ takových, že každý online aloritmus A splňuje $\mathbb{E}[L_A^T - L_{min}^T] \geq \Omega(\sqrt{T})$.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/