Algoritmická teorie her – příklady na 4. cvičení*

4. listopadu 2024

1 Lemkeho–Howsonův algoritmus

Polyedr nejlepších odpovědí hráče 1 v maticové hře $G = (\{1,2\}, A, u)$ s výplatními maticemi M a N je polyedrem

$$\overline{P} = \{(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \colon x \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top x = 1, N^\top x \leq \mathbf{1}v\}.$$

Pro hráče 2 se jedná o polyedr

$$\overline{Q} = \{(y,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon y \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top y = 1, My \leq \mathbf{1}u\}.$$

Bod (x,v) polyedru $\overline{P}$ má *značku* $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $x_i = 0$ nebo pokud $i \in A_2$ a $(N^\top)_i x = v$. Bod (y,u) polyedru $\overline{Q}$ má značku $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $(M)_i y = u$ nebo pokud $i \in A_2$ a $y_i = 0$.

Pro nezáporné matice M a $N^\top$, které nemají nulový sloupec, je *normalizovaným polytopem nejlepších odpovědí* pro hráče 1 polytop

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x \geq \mathbf{0}, N^\top x \leq \mathbf{1}\}.$$

Pro hráče 2 se jedná o polytop

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y \geq \mathbf{0}, My \leq \mathbf{1}\}.$$

Značky v P a Q jsou definovány analogicky jako u $\overline{P}$ a $\overline{Q}$.

Nashova ekvilibria u nedegenerované hry odpovídají párům vrcholů z $P \times Q \setminus \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$, které mají všechny značky.

Příklad 1. *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru na kuře. Poté v daných polyedrech nalezněte páry vrcholů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.*

	Zatočit (3)	Jet rovně (4)
Zatočit (1)	$(10, 10)$	$(9, 11)$
Jet rovně (2)	$(11, 9)$	$(0, 0)$

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashova ekvilibria následující hry dvou hráčů:*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výpočet začněte výběrem značky 2.

Graf konfigurací má vrcholy tvořené páry (x,y) vrcholů z $P \times Q$, které jsou *k-téměř plně označené*, neboli každá značka z $A_1 \cup A_2 \setminus \{k\}$ je značkou buď bodu x nebo y. Vrcholy (x,y) a (x',y') tvoří hranu, pokud buď $x = x'$ a yy' je hranou Q nebo pokud xx' je hranou P a $y = y'$.

Příklad 3. *Dokažte, že Lemkeho–Howsonův algoritmus neskončí ve vrcholech tvaru* $(x, \mathbf{0})$ *či* $(\mathbf{0}, y)$ *v grafu konfigurací.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/