Algoritmická teorie her – příklady na 3. cvičení*

21. října 2024

1 Maticové hry

Maticová hra je hrou v normálním tvaru pro 2 hráče. Maticová hra je *nedegenerovaná*, pokud každý hráč má nanejvýš k nejlepších čistých odpovědí na každou strategii s doménou velikosti k. *Maticová hra s nulovým součtem* je hra, kde užitek jednoho hráče se vždy rovná ztrátě druhého. U maticové hry $G = (\{1,2\}, A, u)$ s $A_1 = \{1, \ldots, m\}$ a $A_2 = \{1, \ldots, n\}$ používáme výplatní matice M a N, kde $(M)_{i,j} = u_1(i,j)$ a $(N)_{i,j} = u_2(i,j)$ pro všechna $i \in A_1$ a $j \in A_2$.

Na přednášce jsme si ukazovali následující algoritmus pro výpočet Nashových ekvilibrií nedegenerovaných maticových her.

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Vstup: Nedegenerovaná maticová hra G.
Výstup: Všechna Nashova ekvilibria hry G.
for každé $k \in \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$ a dvojici domén (I, J) velikosti k

$$\begin{cases} \text{vyřešte systém rovností } \sum_{i \in I} (N^\top)_{j,i} x_i = v, \sum_{j \in J} (M)_{i,j} y_j = u, \\ \text{pro každé } i \in I, j \in J \text{ a } \sum_{i \in I} x_i = 1, \sum_{j \in J} y_j = 1 \\ \text{pokud } x, y \geq \mathbf{0} \text{ a } u = \max\{(M)_i y \colon i \in A_1\}, v = \max\{(N^\top)_j x \colon j \in A_2\}, \\ \text{pak vraťte } (x, y) \text{ jako Nashovo ekvilibrium} \end{cases}$$

Příklad 1. *Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezněte Nashovo ekvilibrium Hry na kuře s doménami velikosti 2.*

	Zatočit (1)	Jet rovně (2)
Zatočit (1)	$(0,0)$	$(-1,1)$
Jet rovně (2)	$(1,-1)$	$(-10,-10)$

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. *Rozhodněte, zda je Hra o duši Gothamu degenerovaná a nalezněte všechna Nashova ekvilibria této hry. Čím se množina všech ekvilibrií liší od dříve spočítaných příkladů?*

	Spolupracovat (1)	Odpálit bombu (2)
Spolupracovat (1)	$(0,0)$	$(0,1)$
Odpálit bombu (2)	$(1,0)$	$(0,0)$

Tabulka 2: Hra o duši Gothamu.

Příklad 3. *Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.*

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *a* $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~cizek/

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *a* $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 4. *Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.*

(a) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \dots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$	$\mathbf{1}x_0 \le M^\top x.$
	$y_1, \dots, y_n \ge 0.$	

(b) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \dots, y_n$	$x_0, x_1, \dots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1}y_0 - My \ge \mathbf{0},$	$\mathbf{1}x_0 - M^\top x \le \mathbf{0},$
	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$	$\sum_{i=1}^m x_i = 1,$
	$y_1, \dots, y_n \ge 0.$	$x_1, \dots, x_m \ge 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\le$	$y_i \ge 0$
	$\ge$	$y_i \le 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \ge 0$	j-tá podmínka má $\ge$
	$x_j \le 0$	$\le$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Příklad 5. *Dokažte, že jsou-li* (s_1, s_2) *a* (s_1', s_2') *smíšená Nashova ekvilibria ve hře s nulovým součtem, tak potom jsou jimi i profily* (s_1, s_2') *a* (s_1', s_2).