Algoritmická teorie her – příklady na 1. cvičení*

30. září 2024

1 Lineární programování z rychlíku

Spousta praktických úloh i čistě kombinatorických lze naformulovat jako úloha lineárního programování (LP). Na úlohu LP můžeme použít známé metody a efektivně ji vyřešit. Každá úloha lineárního programování se dá převést do *kanonického tvaru* daného maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \text{za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Příklad 1. *Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy.*

- *K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.*
- *Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.*
- *Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.*
- *Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.*

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéci? Zformulujte příslušnou úlohu LP.

Příklad 2. *Ukažte, jak lze:*

1. *Převést maximalizační úlohu LP na minimalizační a naopak.*
2. *Převést úlohu LP, která má všechny proměnné $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, na úlohu LP s proměnnými $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$ a naopak.*
3. *Převést úlohu LP s podmínkami ve tvaru nerovností na úlohu LP, jejíž podmínky jsou pouze rovnosti a naopak.*

Vyžadujeme-li celočíslenost proměnných, dají se lineárním programováním vyjádřit i NP-těžké úlohy. Bez této podmínky je vyřešení lineárního programování vyřešitelné v polynomiálním čase. V praxi se používá *simplexová metoda*, která v praxi funguje rychle, ale na umělých vstupech může běžet exponenciálně dlouho.

Příklad 3. *Zformulujte* Problém batohu *pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro n předmětů, kde i-tý má nějakou váhu v_i a cenu c_i, máme batoh s danou nosností V a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali celkovou cenu předmětů v batohu.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜cizek/

2 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s m proměnnými a n podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s n proměnnými a m podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci n podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \ldots, y_n \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Příklad 4. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Následující věta je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 1 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.

(b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.

(c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.

(d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Obecné lineární programy jde dualitou převést podle následující tabulky:

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Příklad 5. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$